

《数学物理方程》教案

- 1、课程名称：《数学物理方程》
- 2、教材：《偏微分方程》，高等教育出版社，第四版，陈祖墀编著，2018年
- 3、适用专业：数学基地班
- 4、适用年级：三年级
- 5、学年：2023-2024 学年
- 6、学期：第 1 学期
- 7、任课教师：王征平
- 8、编写时间：2023 年 8 月
- 9、上课时间及教室：第 1-8 周（2023 年 9 月 4 日至 10 月 29 日）：
周二 1-2 节（8:00-9:35），新 4（博学北）教学楼 203；
周四 3-5 节（9:55-12:20），新 4（博学北）教学楼 311

第一章 绪论

1、教学目标及基本要求

目的：1. 理解偏微分方程的基本概念，能判别偏微分方程的阶数、非线性偏微分方程的三种类型。2. 理解拉普拉斯算子的性质，了解与拉普拉斯算子相关的三种典型的二阶线性偏微分方程。3. 理解叠加原理在线性偏微分方程求解中的应用。4. 了解定解问题的分类和适定性的内容。5. 理解二阶半线性偏微分方程的分类，并且把两个自变量的二阶线性偏微分方程化为标准型。

要求：掌握偏微分方程的基本概念，如：方程的阶，方程的古典解，齐次与非齐次方程，线性（非线性）偏微分方程；掌握判别非线性偏微分方程的三种类型（半线性、拟线性、完全非线性）的方法；掌握拉普拉斯算子的平移不变性和旋转不变性，了解三种典型的二阶线性偏微分方程：波动方程、热传导方程、拉普拉斯方程，理解复解析函数的实部和虚部都满足拉普拉斯方程；掌握叠加原理在线性偏微分方程求解中的应用；掌握三类定解问题的分类标准和边值问题的三类边界条件，了解定解问题的适定性内容；掌握二阶线性偏微分方程的三种类型：椭圆型、双曲型、抛物型，以及两种分类判别方法：二次型方法、特征值方法。

2、教学内容及学时分配

教学内容	学时
§ 1.1 偏微分方程的基本概念	2
§ 1.2 定解问题	2
§ 1.3 二阶线性偏微分方程的分类与标准型	4
习题课	2
合计	10

3、教学重点与难点

重点：偏微分方程的基本概念。

难点：二阶半线性偏微分方程的分类与标准型

4、教学方式（手段）及教学过程中应注意的问题

通过讲授法讲解偏微分方程的基本概念；针对难点内容，通过讲授具体的例题，先和学生讨论解决问题的思路，然后再详细讲解答题过程。

5、本章习题和思考题

习题：习题 1.1, 1.6, 1.7。思考题：1.10,1.20

6、本章参考书目

[1] 数学物理方程，谷超豪等编，高等教育出版社，2002.

[2] 数学物理方程，王明新主编，清华大学出版社，2009.

§ 1.1 偏微分方程的基本概念

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) 偏微分方程 (Partial Differential Equations, 简记为 PDE) 的定义

● 方程的来历:

在中国, 方程一词最早出自古代 (公元 1 世纪) 数学专著《九章算术》第八章; 在西方, equation 作为专门概念出现在 16 世纪法国数学家韦达的著作《论方程的识别与订正》。

● 代数方程:

在微积分出现以前, 人们研究的方程主要是指**代数方程**, 即含有未知数的等式。例如: $2x - 1 = 3$ 。线性方程组 (消元法)、一元 n 次方程 (代数基本定理、伽罗瓦理论)、费马大定理: 又被称为“费马最后的定理”, 由法国数学家费马提出。它断言当整数 $n > 2$ 时, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解。被提出后, 历经三百多年的历史, 最终在上世纪 90 年代被英国数学家安德鲁·怀尔斯证明。

● 方程的作用:

人们在求解某些实际问题时, 可以通过**列方程求解**来克服逆向思考的困难。

● 微分方程:

微分方程是指含有自变量, 未知函数及未知函数的导数的关系式。

微分方程分为**常微分方程 (Ordinary Differential Equations, 简记为 ODE)**和**偏微分方程 (Partial Differential Equations, 简记为 PDE)**。

ODE 的定义: 未知函数是一元函数的微分方程。例如: $y''(t) + y(t) = t^2 + 1$ 。

PDE 的定义: 未知函数是多元函数的微分方程。例如: 设二元函数 $u(x, y)$ 满足

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Remark:

1. 比较代数方程与微分方程的解 (solution) 可知: 代数方程求解的是“数”, 微分方程求解的是“函数”。
2. 在 PDE 的定义中, 因为未知函数是多元函数, 所以 PDE 中涉及到的未知函数的导数是指偏导数。
3. 在经典的 PDE 中, 未知函数往往对应于一些具体的物理量, 比如温度、位移等, 未知函数的自变量往往表示时间和空间位置, PDE 反映的就是这些物理量随自变量变化的规律。所以 PDE 也经常叫做“数学物理方程”。

(2) PDE 的发展概述

微积分产生以后, 人们开始把物理和力学中的一些问题归结为 PDE 进行研究。

● 达朗贝尔 (d'Alembert)

18 世纪中叶, 法国数学家**达朗贝尔**为 PDE 的出现做出了巨大贡献, 他于 1746 年发表了论文《张紧的弦振动是形成的曲线研究》, 在这篇论文里, 他首先提出了波动方程, 并于 1750 年探讨了它的解法, 这就是著名的“达朗贝尔公式”。

● 傅里叶 (Fourier)

十九世纪, 法国数学家**傅里叶**揭开了 PDE 发展的序幕, 他于 1822 年发表的《热的解析理论》是数学史上的经典文献之一。傅里叶研究的主要是吸热或放热物体内部的温度随空间和时间的变化规律。他根据物理原理推导出了三维空间的热传导方程。为了求解热传导方程, 傅里叶使用了“分离变量法”并发明了“傅里叶级数”这一非常重要的分析工具。

● 格林 (Green)

十九世纪 PDE 的另一个重要发展是围绕着位势方程来进行的, 位势方程是用来研究静电场中的电位势与电荷密度之间的关系, 这方面的代表人物是英国数学家**格林**, 他提出了格林公式以及格林函数等重要概念, 至今还被广泛应用于 PDE 的研究。格林是剑桥数学物理学派

的开山祖师，他的工作培育了斯托克斯(G.Stokes)、麦克斯韦(J.C.Maxwell)等杰出的后继者，他们是十九世纪典型的数学物理学家。他们的主要目标，是发展求解重要物理问题的一般数学方法，而他们手中的主要工具就是 PDE，以至于在十九世纪，PDE 几乎变成了数学物理的同义词。剑桥数学物理学派的贡献使经历了一个多世纪沉寂后英国数学在十九世纪得以复兴，麦克斯韦 1864 年导出的电磁场方程是十九世纪数学物理最伟大的成就，正是根据对这组方程的研究，麦克斯韦预言了电磁波的存在（类比于海王星的发现之于牛顿力学），不仅给科学和技术带来巨大的冲击，同时也使 PDE 威名大振。爱因斯坦在一次纪念麦克斯韦的演讲中说：“PDE 进入理论物理学时是婢女，但逐渐变成了主妇，”他认为这是从十九世纪开始的，而剑桥数学物理学派尤其是麦克斯韦在这一转变中起了重要的作用。

- 进入二十世纪以后，PDE 更加广泛应用于微分几何学，物理，生物，经济学等众多领域，展现出勃勃生机。

Remark:

PDE 应用的主要途径：建立 PDE 模型、寻找求解方法、进行理论分析、预测或解释实际现象。

(3) PDE 的一些基本概念

PDE 的阶：方程中未知函数的最高阶偏导数的阶数。比如 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 就是二阶 PDE。

二阶 PDE 的一般形式：设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ， $u(x) : R^n \rightarrow R$ ，记

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad D^2u = (u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots, u_{x_nx_n}) = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{x_nx_1} & \cdots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix},$$

二阶 PDE 的一般形式可以写成如下形式：

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0.$$

为了方便给出高阶 PDE 的一般形式，我们引入多重指标 (multi-index) 的记号。

设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ，其中每个 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是非负整数，记 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ，称为多重指标 α 的阶。对于函数 $u(x) : R^n \rightarrow R$ ，记

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad \text{设 } k \text{ 是正整数，记 } D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}.$$

比如对于三元函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ ，设多重指标 $\alpha = (1, 1, 0)$ ，则 $D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{x_1x_2}$ 。

如果 $\alpha = (0, 2, 0)$ ，则 $D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{x_2x_2}$ 。此时，

$$D^2u = \{D^\alpha u : |\alpha| = 2\} = \{u_{x_1x_1}, \dots, u_{x_3x_3}\}.$$

借助于多重指标的记号，k 阶(k>2) PDE 的一般形式可以写成如下形式：

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^k u) = 0.$$

PDE 的古典解：未知函数在求解区域内足够光滑，并且处处满足方程。

Consider the following PDE

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^k u) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (*)_1$$

A function $u(x)$ is called a classical solution of $(*)_1$ if $u(x) \in C^k(\Omega)$ and $(*)_1$ holds for any $x \in \Omega$.

PDE 的自由项: 方程中与未知函数及其所有偏导数无关的项。如果自由项恒等于零, 则称该 PDE 为齐次 (homogeneous) 方程; 如果自由项不恒等于零, 则称该 PDE 为非齐次 (non-homogeneous) 方程。

比如, 对于 PDE $u_{x_1 x_1} = f(x)$, 其中 $f(x)$ 为自由项。

线性 PDE: 方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的。比如我们把一个 PDE 写成 $L(u) = f(x)$ 的形式, 那么线性 PDE 是指 $L(au_1 + bu_2) = aL(u_1) + bL(u_2)$, 其中 $a, b \in R$, u_1, u_2 是未知函数。

二阶线性 PDE 的一般形式为: 见教材第二页 (1.1.5) 式。

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \quad (*)_2$$

其中二阶导数项前面的系数 $a^{ij} = a^{ji}$ (因为 $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, 这样可以保证二阶导数项的系数矩阵是对称的), 且至少有一个 a^{ij} 不恒等于零。(保证 PDE 中有二阶导数项, 不然就不是二阶 PDE 了)。

上面的 PDE $(*)_2$ 用多重指标的记号可以写成

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (*)'_2$$

比如对于三元函数 $u(x_1, x_2, x_3)$, 如果多重指标 $\alpha = (1, 1, 0)$, $D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{x_1 x_2}$, 此时

$A_\alpha(x)$ 对应的就是方程 $(*)_2$ 中的系数 $a^{12}(x)$; 如果多重指标 $\alpha = (0, 1, 0)$,

$D^\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$, 此时 $A_\alpha(x)$ 对应的就是方程 $(*)_2$ 中的系数 $b^2(x)$; 如果多重指标

$\alpha = (0, 0, 0)$, $D^\alpha u = u$, 此时 $A_\alpha(x)$ 对应的就是方程 $(*)_2$ 中的系数 $c(x)$ 。

非线性 PDE:

不是线性 PDE 的偏微分方程统称为非线性 PDE。非线性 PDE 分为下面三种类型:

半线性(semi-linear)PDE: 最高阶导数是线性的, 并且其系数只依赖于自变量。

拟线性(quasi-linear)PDE: 最高阶导数是线性的, 并且其系数依赖于未知函数或未知函数的低阶导数。

完全非线性(fully nonlinear)PDE: 最高阶导数是非线性的。

Remark: 判断一个非线性 PDE 究竟是属于“半线性”、“拟线性”还是“全非线性”,

首先看最高阶导数 $\begin{cases} \text{线性: 半线性 or 拟线性} \Rightarrow \\ \text{非线性: 完全非线性 PDE} \end{cases}$

再看最高阶导数的系数 $\begin{cases} \text{只依赖自变量或恒等于常数: 半线性PDE} \\ \text{依赖未知函数或其低阶导数: 拟线性PDE} \end{cases}$ 。

例 1. 极小曲面方程(minimal surface): 该方程来源于求给定周长, 面积最小的曲面。方程的具体形式为, 未知函数 $u(x, y), (x, y) \in R^2$ 满足

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0。 \text{它是一个二阶拟线性 PDE.}$$

例 2. 浅水波方程, 又叫 Kdv 方程: 该方程来源于对水波扩散现象的研究。方程的具体形式为, 未知函数 $u(x, t), (x, t) \in R^1 \times R^1$ 满足

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0, \text{其中 } c \text{ 是常数。它是一个三阶半线性 PDE.}$$

例 3. 哈密顿-雅克比方程(Hamilton-Jacobi): 该方程来源于求解分析力学中的动力学问题。方程的具体形式为, 未知函数 $u(x, t), (x, t) \in R^3 \times R^1$ 满足

$$u_t + |Du|^2 + f(x) = 0, \text{其中 } |Du|^2 = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2。$$

它是一个一阶全非线性 PDE。

例 4. 蒙日-安培方程(Monge-Ampère): 该方程来源于研究微分几何问题。方程的具体形式为, 未知函数 $u(x), x = (x_1, x_2) \in R^2$ 满足

$$\det(D^2u) = f(x), \text{其中 } D^2u = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix}。$$

它是一个二阶全非线性 PDE。

(4) Laplace 算子的定义及性质

定义: 对于函数 $u(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, 或者 $u(x, t), (x, t) \in R^n \times R$, 定义如下的微分算子 Δ :

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}, \text{这个微分算子 } \Delta \text{ 称为 Laplace 算子。}$$

性质 1. $\Delta u = \operatorname{div}(Du), Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$ 。

性质 2. Laplace 算子 Δ 在坐标的平移或者旋转变换下保持不变, 也称作在刚性运动下保持不变。

(5) 三类典型的二阶线性 PDE.

1) 波动方程(wave equation): 函数 $u(x, t), (x, t) \in R^n \times R$ 满足

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \text{其中 } a > 0 \text{ 是常数。}$$

2) 热传导方程(heat equation): 函数 $u(x, t), (x, t) \in R^n \times R$ 满足

$$u_t - k \Delta u = 0, \text{其中 } k > 0 \text{ 是常数。}$$

3) Laplace 方程: 函数 $u(x), x \in R^n$ 满足 $\Delta u(x) = 0$ 。如果 $u(x)$ 满足非齐次方程 $\Delta u(x) = f(x) \neq 0$, 我们称该非齐次方程为 Poisson 方程。两者统称为“位势方程”。

思考题 1: 如果 $u(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ 满足 Laplace 方程 $\Delta u(x) = 0$, 而且是径向函数

(radial function), 即 $u(x) = u(r), r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, 求 $u(r)$ 满足的常微分方程。

思考题 2: 证明复解析函数的实部和虚部都满足 Laplace 方程。即, 设 $z = x + iy$, 如果

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是解析函数, 则 $u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$ 。提示:

根据复解析函数的实部和虚部满足柯西-黎曼方程, 见教材第三页 (1.1.9) 式。

(6) 叠加原理(superposition principle)

在物理、力学等学科中,很多现象具有叠加效应,即几种不同因素同时出现所产生的效果等于各个因素分别单独出现所产生的效果的总和,我们称这种现象为“叠加原理”。

比如,牛顿第二定律 $F = ma$ 。叠加原理适用于线性 PDE 的求解。

§ 1.2 定解问题

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) **定解条件**: 根据实际需要, PDE 的解必须满足一些事先给定的条件。主要包括**初始条件**和**边界条件**。

定解问题: PDE 配上定解条件就构成“定解问题”。

Remark: 引入定解条件的必要性: 1) 从物理的角度看,仅有方程还不足以确定物体的运动,还与物体的初始状态以及边界所受的外力作用有关。2) 从数学的角度看, PDE 的通解中往往含有一些任意的常数或函数,必须根据定解条件来确定这些常数或函数,从而确定给出实际问题的合理解。

(2) 定解问题的分类:

1) **初值问题 (Initial value problem)**, 也叫 **Cauchy 问题**。是指给定 PDE 的解必须满足初始时刻的条件。比如: 函数 $u(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in R^n, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{其中 } \varphi(x) \text{ 表示物体在初始时刻的温度分布。}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in R^1, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \quad \text{其中 } \varphi(x) \text{ 表示初始位移, } \psi(x) \text{ 表示初始速度。}$$

2) **边值问题 (boundary value problem)**: 是指给定 PDE 的解必须满足某种边界条件。

第一边值问题 (Dirichlet problem), 比如

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Dirichlet problem 给出了解在边界上的值。

第二边值问题 (Neumann problem), 比如

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{其中 } \nu \text{ 表示 } \Omega \text{ 边界上的单位外法向。}$$

Neumann problem 给出了解在边界上的法向导数的值

第三边值问题 (Robin problem), 比如

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ au + b \frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{其中 } a, b \text{ 是常数或以 } x \text{ 为自变量的函数。}$$

Robin problem 给出了解和其法向导数的线性组合在边界上的值。

3) **初边值问题 (initial-boundary value problem)** : 是指给定 PDE 的解必须满足初始时刻的条件和边界条件。比如

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = x(l-x), 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

(3) **定解问题的适定性 (well-posedness)** : 是指 PDE 的解满足“存在性” (existence); “唯一性” (uniqueness); “稳定性” (stability)

稳定性的数学描述: 设 H, X 是两个线性赋范空间, 某个 PDE 在两个定解条件 φ_1, φ_2 下对应的解分别为 u_1, u_2 , 解的稳定性可以表达成: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_H < \delta$, 就有 $\|u_1 - u_2\|_X < \varepsilon$ 。

§ 1.3 二阶半线性 PDE 的分类和标准型

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) 多个自变量的方程

考虑下面的二阶半线性 PDE:

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (1.3.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \forall x \in \Omega$ 并且是实值函数。

固定 $x^0 \in \Omega$, 我们的目标是: 讨论 PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的分类。为此, 我们先引入两个重要概念: **线性主部**和**特征型**。

PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的**线性主部**是

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x^0) u_{x_i x_j}, \quad (1.3.2)$$

它对应的二次型是

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x^0) \xi_i \xi_j, \quad \text{其中 } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n. \quad (1.3.3)$$

我们称这个二次型是 PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的**特征型**。它还可以写成下面矩阵的形式:

$$Q(\xi) = \xi A_0 \xi^T, \quad (1.3.3)'$$

其中 ξ^T 表示向量 ξ 的转置, 矩阵 A_0 表示 PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的线性主部的系数矩阵, 即 $A_0 = (a^{ij}(x^0))_{n \times n}$, 它是一个 $n \times n$ 的实对称矩阵。

Remark: 特征型就是线性主部的系数矩阵对应的二次型。

为了讨论 PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的分类, 我们介绍两种方法: 二次型方法、特征值

方法。

二次型方法：先把特征型 $Q(\xi)$ 化成标准型，也就是把系数矩阵 A_0 对角化，使得对角线上的元变成 $+1$ 或 -1 。注意到 A_0 是一个 $n \times n$ 的实对称矩阵，根据二次型理论，我们可以找到变换矩阵 $B, \det(B) \neq 0$ ，使得 A_0 的对角化矩阵 $A_{0,*} = B^T A_0 B$ 。于是 $Q(\xi)$ 化成下面的标准型

$$Q(\lambda) = \lambda A_{0,*} \lambda^T = \sum_{i=1}^m a_*^{ii}(x^0) \lambda_i^2, m \leq n, \text{ 这里的 } m \text{ 表示系数矩阵 } A_0 \text{ 的秩。}$$

Remark: 根据二次型理论的**惯性定理**，对角线元 $\{a_*^{ii}(x^0), i=1,2,\dots,m\}$ 中取 $+1$ 或 -1 的个数完全由系数矩阵 A_0 决定，与变换矩阵 B 的选取无关。

下面我们依据对角矩阵 $A_{0,*}$ 的对角线元 $\{a_*^{ii}(x^0), i=1,2,\dots,m\}$ 的取值情况来讨论 PDE (1.3.1) 在 x^0 点处的分类。

1) 椭圆型： $m = n$ ，且所有 $\{a_*^{ii}(x^0), i=1,2,\dots,m\}$ 的取值具有相同的符号。

2) 双曲型： $m = n$ ，且所有 $\{a_*^{ii}(x^0), i=1,2,\dots,m\}$ 的取值中有 $n-1$ 个同号。

3) 抛物型： $m < n$ 。

特征值方法：求出系数矩阵 A_0 的特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ，如果 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 都非零且同号，是椭圆型；如果 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 都非零且有 $n-1$ 个同号，是双曲型；如果 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 中至少有一个等于零，是抛物型。

Remark: 二次型方法与特征值方法等价，原因是：如果两个实对称矩阵合同，那么它们正、负特征值的个数相同。因为系数矩阵 A_0 与对角矩阵 $A_{0,*}$ 合同，所以 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 与 $\{a_*^{11}(x^0), \dots, a_*^{mm}(x^0), 0, \dots, 0\}$ 中大于零，小于零，等于零的个数相同。

思考题：判断波动方程，热传导方程，Laplace 方程分别属于椭圆型、双曲型、抛物型中的哪种类型。

(2) 两个自变量的方程

设 Ω 是一个平面区域，函数 $u(x, y), (x, y) \in \Omega$ 满足下面的方程：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.3.8)$$

其中系数 a_{11}, a_{12}, a_{22} 是定义在 Ω 上的连续实值函数，且不同时为零。

下面我们利用特征值方法来判断 PDE (1.3.8) 属于椭圆型、双曲型、抛物型中的哪种类型。

先写出系数矩阵 A_0 ，

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

再计算 A_0 的特征值，

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \text{ 记这个特征多项式为 } f(\lambda), \text{ 并}$$

且令 $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A_0)$ 。

计算 $f(\lambda)$ 的判别式，

$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 + 4d = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$ ，所以 $f(\lambda)$ 一定有两个实根，记为 λ_1, λ_2 。分三种情况：

如果 $f(\lambda)$ 至少有一个根等于零，根据 $\lambda_1\lambda_2 = -d$ ，有 $d = 0$ ，此时 PDE (1.3.8) 属于抛物型；

如果 $f(\lambda)$ 的两个根都不等于零且符号相同，则 $d < 0$ ，此时 PDE (1.3.8) 椭圆型；

如果 $f(\lambda)$ 的两个根都不等于零且符号相异, 则 $d > 0$, 此时 PDE (1.3.8) 双曲型。

思考题: 判断下面的方程属于椭圆型、双曲型、抛物型中的哪种类型

$$xu_{xx} + 2yu_{xy} + yu_{yy} = 0。$$

(3) 化标准型

下面我们要寻求自变量 (x, y) 的光滑可逆变换把 PDE (1.3.8) 化成标准型。

1. 实的光滑可逆坐标变换的性质

考虑 (1.3.8) 的线性主部, 即二阶导数项

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}, \quad (1.3.10)$$

记为 $L_0 u$ 。对于 $(x, y) \in \Omega$, 作变换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}, \text{ 其中 } \xi, \eta \text{ 都是实值光滑函数, 且 Jacobi 行列式}$$

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det(J) \neq 0 \quad (1.3.11) \text{ 注记: 这里要强调是不等于零的实数。}$$

根据反函数定理, 存在逆变换

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}, \text{ 把它代入 } u(x, y), \text{ 变成 } u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \text{ 记为 } u(\xi, \eta)。 \text{ 根据复合函数}$$

求导法则, 有

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$, 类似的还可以算出 u_{yy}, u_{xy} 关于 (ξ, η) 的表达式。把这些表达式代入 (1.3.10), 得

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = a_{11}^* u_{\xi\xi} + 2a_{12}^* u_{\xi\eta} + a_{22}^* u_{\eta\eta} + k_1 u_\xi + k_2 u_\eta, \quad (1.3.12)$$

其中右端各个系数的表达式为:

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$a_{11}^* = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2$$

$$a_{12}^* = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$a_{22}^* = \begin{pmatrix} \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2,$$

$$k_1 = a_{11} \xi_{xx} + 2a_{12} \xi_{xy} + a_{22} \xi_{yy},$$

$$k_2 = a_{11} \eta_{xx} + 2a_{12} \eta_{xy} + a_{22} \eta_{yy}。$$

设 $A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$, 则 $A^* = JAJ^T$, 这里 J^T 表示 Jacobi 矩阵 J 的转置。

令 $d^* = -\det(A^*)$, 有

$d^* = -[\det(J)]^2 \det(A) = [\det(J)]^2 d$ 。所以我们得到下面两个关于“实的光滑可逆坐标变换”的重要性质：

- 1) 对于含两个自变量的二阶线性 PDE, 实的光滑可逆坐标变换 **不改变方程的类型** (椭圆型、双曲型、抛物型)。因为判别式 d^* 与 d 的符号相同。
- 2) 对于含两个自变量的二阶线性 PDE, 实的光滑可逆坐标变换 **不改变方程的阶数**, 还是二阶 PDE。因为如果矩阵 A^* 是零矩阵, 那么根据 $A^* = JAJ^T$ 和 J 是可逆矩阵, 可以推出 A 也是零矩阵, 这就意味着原方程 (1.3.8) 就不再是二阶方程。

2. PDE (1.3.8) 的特征线

PDE (1.3.8) 的特征方程: 设函数 $\varphi(x, y)$ 满足

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (1.3.14)$$

我们称 (1.3.14) 是 (1.3.8) 的特征方程。它是一阶全非线性 PDE。

为了求解方程 (1.3.14), 我们研究相应的 ODE:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (1.3.15)$$

这个 ODE 称为方程 (1.3.8) 的 **特征线方程**。由这个 ODE 确定的 $\frac{dy}{dx}$ 称为 **特征方向**。

如果 $a_{11} \neq 0$, 由特征线方程 (1.3.15) 可以推出特征方向 $\frac{dy}{dx}$ 满足下面的方程

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \quad (1.3.16)$$

Remark: 根据方程 (1.3.16), 把 $\frac{dy}{dx}$ 看成是未知函数, 由一元二次方程的求根公式, 判别式

正好是 $(2a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22} = 4d$ 。如果 $d > 0$, 即方程 (1.3.8) 为双曲型, 由 (1.3.16) 得

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{d}}{a_{11}}$, 所以双曲型方程有两个不同的实特征方向。类似的可以推出, 抛物型方程

($d = 0$) 只有 1 个实特征方向; 椭圆型方程 ($d < 0$) 没有实特征方向。

特征线方程 (1.3.15) 的通积分: 由 (1.3.16) 得 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 这种形式的 ODE。一般来说,

从这样的 ODE 很难求出显式通解, 即 $y = y(x) + c$, c 是常数。这时我们可以用 **隐式通解** 来表达 $y(x)$, 即 $\varphi(x, y) = c$, c 是常数。这个隐式通解称为 **特征线方程 (1.3.15) 的通积分**。

由 $\varphi(x, y) = c$ 在 (x, y) 平面上确定的函数图像称为 **(1.3.15) 的积分曲线**, 又叫 **PDE (1.3.8) 的特征线**。

Remark: 根据通积分的定义, 我们说 $\varphi(x, y) = c$ (c 是常数) 是 (1.3.15) 的通积分, 这等

价于说, 由 $\varphi(x, y) = c$ 确定的 $\frac{dy}{dx}$ 满足方程 (1.3.16)。对 $\varphi(x, y) = c$ 两边关于 x 求导, 注

意其中 y 是关于 x 的函数, 所以 $\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ (假设 $\varphi_y \neq 0$)。因此

$\varphi(x, y) = c$ (c 是常数) 是 (1.3.15) 的通积分 $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 满足方程 (1.3.16)。

定理 1.3.1 假设 $\varphi_y \neq 0$, 则 $\varphi(x, y)$ 是 (1.3.14) 的解 $\Leftrightarrow \varphi(x, y) = c$ (c 是常数) 是 (1.3.15)

的通积分, 即 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 满足方程 (1.3.16)。

Proof: “ \Leftarrow ” 设 $\varphi(x, y) = c$ (c 是常数) 是 (1.3.15) 的通积分, 即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad (1.3.17)$$

满足方程 (1.3.16)。把 (1.3.17) 代入 (1.3.16), 得

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \Rightarrow a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0。$$

所以 $\varphi(x, y)$ 是 (1.3.14) 的解。

“ \Rightarrow ” 设 $\varphi(x, y)$ 是 (1.3.14) 的解。下面我们验证 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 满足方程 (1.3.16)。

因为 $\varphi(x, y)$ 是 (1.3.14) 的解, 在 (1.3.14) 等式两边同除以 φ_y^2 , 所以 $\varphi(x, y)$ 满足

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (1.3.14)'$$

由此推出 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 满足方程 (1.3.16)。■

求 PDE (1.3.8) 的特征线: 为了求 PDE (1.3.8) 的特征线, 分两步。

Step 1. 由 (1.3.16) 得 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 这种形式的 ODE。

Step 2. 求 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的通解, 用 $\varphi(x, y) = c$ (c 是常数) 表示。这个 $\varphi(x, y) = c$ 就是 PDE (1.3.8) 的特征线。

Remark: 如果 $\varphi(x, y) = c$ 是 PDE (1.3.8) 的特征线, 根据上面的定理 1.3.1 可得, $\varphi(x, y)$ 是特征方程 (1.3.14) 的解。

例 1.3.2 求下面 PDE 的特征线。

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (P)$$

解: 令 $a_{11}(x, y) = y, a_{12}(x, y) = 0, a_{22}(x, y) = 1$, 则方程 (1.3.16) 可写成

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0. \quad (C1)$$

当 $y > 0$ 时, 方程 (P) 没有实特征方向;

当 $y < 0$ 时, 由上面的 (C1) 得

$\frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{-1}{y}\right)^{1/2}$, 再求这两个 ODE 的通解, 得

$$x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = c_1, \quad x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = c_2, \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 是常数。}$$

这就是方程 (P) 的两族特征线。■

3. 把 PDE (1.3.8) 化成标准型

先算出 $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ，再根据 d 的符号（大于零，小于零，等于零），对应于 PDE (1.3.8) 的（双曲型，椭圆型，抛物型）这三种类型来分别化成标准型。关键是找出合适的坐标变换。

为了简单起见，我们只考虑 PDE (1.3.8) 的简单情形，即

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0 \quad (1.3.10)'$$

1) $d > 0$ (双曲型)

下面我们分 4 个步骤把方程 (1.3.10)' 化成标准型。

Step1. 求出方程 (1.3.10)' 的特征线

通过求解 ODE: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{d}}{a_{11}}$ ，得到两族特征线

$\varphi_1(x, y) = c_1$ ， $\varphi_2(x, y) = c_2$ ，其中 c_1, c_2 是常数。

Step2. 作坐标变换

令 $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$ ，验证 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$ 。

再由该变换求出逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ ，这是由反函数定理保证的。

Step3. 把坐标变换 $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$ 代入 (1.3.12)，计算出 $a_{11}^*, a_{22}^*, a_{12}^*, k_1, k_2$ 的表达式。

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = a_{11}^*u_{\xi\xi} + 2a_{12}^*u_{\xi\eta} + a_{22}^*u_{\eta\eta} + k_1u_{\xi} + k_2u_{\eta}, \quad (1.3.12)$$

对于双曲型的方程，

根据定理 1.3.1， ξ, η 都是 (1.3.14) 的解，所以由 (1.3.12) 中的系数表达式有 $a_{11}^* = a_{22}^* = 0$ 。

又根据实的光滑可逆坐标变换的性质 2，即“不改变方程的阶数”，得 $a_{12}^* \neq 0$ 。

所以，方程 (1.3.10)' 变为

$$2a_{12}^*(x, y)u_{\xi\eta} + k_1(x, y)u_{\xi} + k_2(x, y)u_{\eta} = 0, \quad (*)_1$$

Step4.

再把坐标逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ 代入 **Step3** 中的方程 (*)₁ 的系数 $a_{12}^*(x, y), k_1(x, y), k_2(x, y)$ ，

把它们都换成关于变量 ξ, η 的表达式。

最后把 $2a_{12}^*u_{\xi\eta} + k_1u_{\xi} + k_2u_{\eta} = 0$ 整理成下面的形式

$$u_{\xi\eta} + k_1^*(\xi, \eta)u_{\xi} + k_2^*(\xi, \eta)u_{\eta} = 0, \quad (*)_2$$

其中 $k_1^*(\xi, \eta) = \frac{k_1(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{2a_{12}^*(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}$ ， $k_2^*(\xi, \eta) = \frac{k_2(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{2a_{12}^*(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}$ ，

方程 (*)₂ 就是方程 (1.3.10)' 的双曲型标准型。

2) $d < 0$ (椭圆型)

注意到，因为椭圆型方程 ($d < 0$) 没有实特征方向，也就不存在实的特征线。因此设 $\varphi(x, y) = c$ (c 是复常数) 是 (1.3.15) 的通积分，则 $\varphi(x, y)$ 一定是复值函数。

Step1.

求解复 ODE: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + i\sqrt{-d}}{a_{11}}$, 得通解 $\varphi(x, y) = c$ (c 是复常数), 其中

$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$, φ_1, φ_2 都是实函数。

Step2. 作坐标变换

令 $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$, 验证 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$ 。

再由该变换求出逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ 。

Step3. 把坐标变换 $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$ 代入 (1.3.12), 计算出 $a_{11}^*, a_{22}^*, a_{12}^*, k_1, k_2$ 的表达式。

对于椭圆型的方程,

根据定理 1.3.1, 因为 $\varphi(x, y) = c$ (c 是复常数) 是 (1.3.15) 的通积分, 所以

$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ 满足方程 (1.3.14), 代入后分开实部和虚部, 得

$$a_{11}^* = a_{22}^*, \quad a_{12}^* = 0。$$

再根据实的光滑可逆坐标变换的性质 2, 即“不改变方程的阶数”, 得 $a_{11}^* = a_{22}^* \neq 0$ 。

所以, 方程 (1.3.10)' 变为

$$a_{11}^* u_{\xi\xi} + a_{22}^* u_{\eta\eta} + k_1 u_{\xi} + k_2 u_{\eta} = 0 \quad (*)_3$$

Step4.

再把坐标逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ 代入 Step3. 中的方程 (*)_3 的系数 $a_{11}^*, a_{22}^*, k_1, k_2$, 把它们都换成

关于变量 ξ, η 的表达式。

最后把 Step3. 中的方程 (*)_3 整理成下面的形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + k_1^*(\xi, \eta) u_{\xi} + k_2^*(\xi, \eta) u_{\eta} = 0。 \text{ 这就是方程 (1.3.10)' 的双曲型标准型。}$$

3) $d = 0$ (抛物型)

由 $d = 0$ 得 $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ 。分两种情况:

Case 1. 如果 $a_{12} = 0$, 则 $a_{11}a_{22} = 0$ 。注意到 a_{11}, a_{22} 不可能同时等于零, 不然的话, 方程

(1.3.10)' 就不再是二阶 PDE。所以 a_{11}, a_{22} 中有且仅有一个等于零。不妨设 $a_{22} = 0, a_{11} \neq 0$ 。

根据 $a_{12} = 0, a_{22} = 0, a_{11} \neq 0$, 得方程 (1.3.10)' 的抛物型标准型是 $u_{xx} = 0$ 。

Remark: 在这种情形, 我们不需要进行坐标变换, 就可以把方程 (1.3.10)' 化成抛物型标准型。

Case 2. 如果 $a_{12} \neq 0$, 则 $a_{12}^2 = a_{11}a_{22} > 0$, 从而 a_{11}, a_{22} 都不等于零。

Step1. 求解 ODE: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, 得到一族特征线 $\varphi(x, y) = c$ 。

Step2. 作坐标变换 $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = x \end{cases}$, 验证 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$ 。

再由该变换求出 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ 。

Step3. 把坐标变换 $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = x \end{cases}$ 代入 (1.3.12), 计算出 $a_{11}^*, a_{22}^*, a_{12}^*, k_1, k_2$ 的表达式。

根据定理 1.3.1, 得 ξ 是 (1.3.14) 的解, 所以根据 (1.3.12) 中 a_{11}^* 的表达式, 有 $a_{11}^* = 0$ 。

把 $\eta = x$ 代入 (1.3.12) 中 a_{22}^* 的表达式, 得 $a_{22}^* = a_{11} \neq 0$

结合 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 即定理 1.3.1 中的 (1.3.17) 式, 和上面 Step1. 中的 $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, 得

$a_{11}\varphi_x + a_{12}\varphi_y = 0$ 。然后把 $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = x \end{cases}$ 代入 (1.3.12) 中 a_{12}^* 的表达式, 得

$$a_{12}^* = a_{11}\varphi_x + a_{12}\varphi_y = 0。$$

所以, 方程 (1.3.10)' 变为

$$a_{22}^*u_{\eta\eta} + k_1u_{\xi} + k_2u_{\eta} = 0 \quad (*)_4$$

Step4.

再把坐标逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$ 代入 Step3. 中的方程 (*)₄ 的系数 a_{22}^*, k_1, k_2 , 把它们都换成关于变量 ξ, η 的表达式。

最后把 Step3. 中的方程 (*)₄ 整理成下面的形式

$$u_{\eta\eta} + k_1^*(\xi, \eta)u_{\xi} + k_2^*(\xi, \eta)u_{\eta} = 0。这就是方程 (1.3.10)' 的抛物型标准型。$$

例 1.3.3 设函数 $u(x, y)$ 满足下列方程

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (x, y) \in R^2 \quad (1.3.23)$$

讨论方程 (1.3.23) 的类型, 并把它化成标准型。

解: 令 $a_{11}(x, y) = 1, a_{12}(x, y) = 0, a_{22}(x, y) = y$, 则判别式

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y。$$

根据 d 的符号, 我们可以判别 (1.3.23) 的类型:

当 $d > 0$, 即 $y < 0$ 时, (1.3.23) 是双曲型;

当 $d < 0$, 即 $y > 0$ 时, (1.3.23) 是椭圆型;

当 $d = 0$, 即 $y = 0$ 时, (1.3.23) 是抛物型。

下面我们按照三种不同类型把 (1.3.23) 分别化成标准型。

1) 当 $y = 0$ 时, 抛物型。由于 $a_{12} = 0$, 适合我们上面讨论的 $d = 0$ (抛物型) 中的 **Case 1.** 所以 (1.3.23) 的抛物型标准型是 $u_{xx} = 0$ 。

2) 当 $y < 0$ 时, 双曲型。

求解 ODE: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{d}}{a_{11}}$, 即 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y}$,

得到两族特征线

$$x + 2\sqrt{-y} = c_1, \quad x - 2\sqrt{-y} = c_2.$$

作变换
$$\begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{-y} \\ \eta = x - 2\sqrt{-y} \end{cases},$$

验证
$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{-y}} \neq 0.$$

再由上面的坐标变换 $\begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{-y} \\ \eta = x - 2\sqrt{-y} \end{cases}$ 求出逆变换 $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \sqrt{-y} = \frac{\xi - \eta}{4} \end{cases}, \text{ 把它代入 (1.3.12) } a_{12}^*, k_1, k_2 \text{ 的表达式, 把它们都换成 } \xi, \eta \text{ 的表达式,}$$

$$a_{12}^* = 2, \quad k_1 = \frac{1}{2\sqrt{-y}} = \frac{2}{\xi - \eta}, \quad k_2 = \frac{-1}{2\sqrt{-y}} = \frac{-2}{\xi - \eta}.$$

最后把 $2a_{12}^*u_{\xi\eta} + k_1u_{\xi} + k_2u_{\eta} = 0$ 整理成

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0, \text{ 这就是 (1.3.23) 的双曲型标准型.}$$

3) 当 $y > 0$ 时, 椭圆型. 求复 ODE $\frac{dy}{dx} = i\sqrt{y}$ 的通解为 $x + 2i\sqrt{y} = c$, 这里 c 是复常数.

取其实部和虚部, 作坐标变换
$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 2\sqrt{y} \end{cases},$$

验证
$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y}} \neq 0.$$

由 (1.3.12) 求出 $a_{11}^*, a_{22}^*, k_1, k_2$ 的表达式, 并且把它们都换成 ξ, η 的表达式,

$$a_{11}^* = a_{22}^* = 1, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{-1}{2\sqrt{y}} = -\frac{1}{\eta}.$$

最后把 $a_{11}^*u_{\xi\xi} + a_{22}^*u_{\eta\eta} + k_1u_{\xi} + k_2u_{\eta} = 0$ 整理成

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0. \text{ 这就是 (1.3.23) 的椭圆型标准型.} \quad \blacksquare$$

第二章、传输方程

1、教学目标及基本要求

目的：1. 理解齐次传输方程初值问题的解法。2. 理解非齐次传输方程初值问题的解法。

要求：掌握齐次传输方程和非齐次传输方程的初值问题的求解公式；掌握含参变量积分的求导公式。

2、教学内容及学时分配

教学内容	学时
§ 2.1 齐次传输方程的初值问题	2
§ 2.2 非齐次传输方程的初值问题	2
合计	4

3、教学重点与难点

重点：齐次传输方程和非齐次传输方程的初值问题的求解公式。

难点：齐次传输方程和非齐次传输方程的初值问题的解法。

4、教学方式（手段）及教学过程中应注意的问题

针对难点内容，使用讨论法和学生先讨论问题的思路，然后再讲授问题的解法。

5、本章习题和思考题

习题 2.4

6、本章参考书目

[1] 数学物理方程，魏培君编，冶金工业出版社，2012.

§ 1 齐次传输方程的初值问题

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) 求解公式的推导

设未知函数 $u(x,t)$ ， $(x,t) \in R^n \times [0,+\infty)$ ，满足下面的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = 0, x \in R^n, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in R^n \end{cases} \quad (2.2.2)$$

其中 $f(x)$ 是给定函数， $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是常向量，即每个 a_i 都是常数，

$$a \cdot Du = a_1 u_{x_1} + \dots + a_n u_{x_n}.$$

对任意固定的 $(x_0, t_0) \in R^n \times (0, +\infty)$ ，令

$$Z(s) = u(x_0 + as, t_0 + s), s \geq -t_0$$

假设 $u(x,t)$ 是 (2.2.2) 的解，则对任意的 $s > -t_0$ ，有 $Z'(s) = 0$ ，从而

$$Z(0) - Z(-t_0) = \int_{-t_0}^0 Z'(s) ds = 0.$$

根据 $Z(s)$ 的定义和 (2.2.2) 中的初值条件，有

$$Z(0) = u(x_0, t_0), \quad Z(-t_0) = u(x_0 - at_0, 0) = f(x_0 - at_0),$$

再由上面的 $Z(0) - Z(-t_0) = 0$ 得 $u(x_0, t_0) = f(x_0 - at_0)$ 。

所以如果 $u(x,t)$ 是 (2.2.2) 的解，一定有

$$u(x,t) = f(x - at). \quad (2.2.3)$$

(2) 求解公式的验证

如果 $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 令 $u(x,t) = f(x-at)$, 关于 t 求导, 可得 $u(x,t)$ 满足 (2.2.2)。

Remark: 这种解称为“行波解”。

§ 2 非齐次传输方程的初值问题

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) 求解公式的推导

设未知函数 $u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$, 满足下面的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = g(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2.4)$$

其中 $f(x,t), g(x)$ 是给定函数, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是常向量, 即每个 a_i 都是常数, $a \cdot Du = a_1 u_{x_1} + \dots + a_n u_{x_n}$ 。

对任意固定的 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, 令

$$Z(s) = u(x_0 + as, t_0 + s), s \geq -t_0$$

假设 $u(x,t)$ 是 (2.2.2) 的解, 则对任意的 $s > -t_0$, 有

$$Z'(s) = f(x_0 + as, t_0 + s),$$

从而,

$$Z(0) - Z(-t_0) = \int_{-t_0}^0 Z'(s) ds = \int_{-t_0}^0 f(x_0 + as, t_0 + s) ds = \int_0^{t_0} f(x_0 + a(s-t_0), s) ds。$$

根据 $Z(s)$ 的定义和 (2.2.2) 中的初值条件, 有

$$Z(0) - Z(-t_0) = u(x_0, t_0) - g(x_0 - at_0)。$$

结合上面的两个式子, 得

$$u(x_0, t_0) = g(x_0 - at_0) + \int_0^{t_0} f(x_0 + a(s-t_0), s) ds。$$

所以如果 $u(x,t)$ 是 (2.2.2) 的解, 一定有

$$u(x,t) = g(x-at) + \int_0^t f(x+a(s-t), s) ds \quad (2.2.5)$$

(2) 求解公式的验证

如果 $f, g \in C^1$, 令 $u(x,t) = g(x-at) + \int_0^t f(x+a(s-t), s) ds$, 则 $u(x,0) = g(x)$ 。所以初值条件成立。下面我们验证 $u(x,t)$ 满足 (2.2.4) 中的方程。

$$u_t = -a \cdot Dg(x-at) + p'(t), \text{ 其中 } p(t) = \int_0^t f(x+a(s-t), s) ds$$

$$\text{为了计算 } p'(t), \text{ 令 } p(t) = \int_0^t f(x+a(s-t), s) ds = \int_0^t q(s,t) ds。$$

根据含参变量积分的求导公式, 得

$$p'(t) = \int_0^t q_t(s,t) ds + q(t,t) = \int_0^t -a \cdot Df(x+a(s-t), s) ds + f(x,t)$$

$$\begin{aligned} \text{从而, } u_t &= -a \cdot Dg(x-at) + p'(t) \\ &= -a \cdot D[g(x-at) + \int_0^t f(x+a(s-t), s)ds] + f(x,t) \\ &= -a \cdot Du(x,t) + f(x,t) \end{aligned}$$

所以 $u(x,t)$ 满足 (2.2.4) 中的方程。

第三章 波动方程

1、教学目标及基本要求

目的：1、理解达朗贝尔公式及应用。2、理解依赖区域、决定区域、影响区域的概念。3、理解分离变量法，特征函数展开法，齐次化原理。4.了解球面平均法和 Kirchhoff 公式。

要求：熟练掌握用达朗贝尔公式、分离变量法、特征函数展开法、齐次化原理求解波动方程的各种定解问题。

2、教学内容及学时分配

教学内容	学时
§ 3.1 达朗贝尔公式及应用	2
§ 3.2 分离变量法	2
§ 3.3 特征函数展开法	2
§ 3.4 齐次化原理、球面平均法	2
习题课	2
合计	10

3、教学重点与难点

重点：掌握用达朗贝尔公式、分离变量法求解波动方程的各种定解问题。

难点：理解分离变量法、特征函数展开法、齐次化原理。

4、教学方式（手段）及教学过程中应注意的问题

通过讲授法讲解本章中的各种求解公式以及定理证明；针对难点内容，通过讲解例题，和学生先讨论问题的思路，然后再讲授问题的证明。

5、本章习题和思考题

习题：习题 3.9, 3.10, 3.11。

6、本章参考书目

[1] 数学物理方程，谷超豪等编，高等教育出版社，2002.

§ 1 达朗贝尔公式及应用

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

(1) 达朗贝尔公式的推导

考虑一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), x \in R^1 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

其中 $a > 0$ 是常数。

下面我们用“传输方程法”，也叫“行波法”，求解 (3.1.2)。

首先，我们可以验证

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) u. \quad (3.1.3)$$

$$\text{令 } v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_t - a u_x. \quad (3.1.4)$$

由 (3.1.2), (3.1.3) 得

$$\begin{cases} v_t + av_x = 0, x \in R^1, t > 0 \\ v(x, 0) = \psi(x) - a\varphi'(x), x \in R^1 \end{cases}$$

根据第二章中的齐次传输方程初值问题的求解公式 (2.2.3), 得

$$v(x, t) = (\psi - a\varphi')(x - at) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at)。$$

再由 (3.1.4), 得

$$\begin{cases} u_t - au_x = f(x, t), x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in R^1 \end{cases}, \text{ 其中 } f(x, t) = \psi(x - at) - a\varphi'(x - at)。$$

根据第二章中的非齐次传输方程初值问题的求解公式 (2.2.5), 注意到 (2.2.5) 中的 a 变成了这里的 $-a$, 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x + at) + \int_0^t f(x - a(s - t), s) ds \\ &= \varphi(x + at) + \int_0^t (\psi - a\varphi')(x - 2as + at) ds, \end{aligned}$$

对上面的积分作变量替换, 令 $y = x - 2as + at$, $dy = -2ads$, 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x + at) + \int_{x+at}^{x-at} (\psi - a\varphi')(y) \frac{1}{-2a} dy \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

上面的 (3.1.5) 称为达朗贝尔公式。

下面我们用“特征线方法”来求解 (3.1.2)。

Step 1 把 (3.1.2) 中的方程化成标准型。

把 $u(x, t)$ 中的 t 看成 y , 则 (3.1.2) 中的方程可以写成 $-a^2 u_{xx} + u_{yy} = 0$ 。

用第一章中化标准型的方法, 先求出上面方程的特征线:

$$x + ay = c_1, \quad x - ay = c_2,$$

作变换 $\xi = x + ay$, $\eta = x - ay$ 。最后把 (3.1.2) 化成下面的标准型: $u_{\xi\eta} = 0$,

它的通解是

$$\begin{aligned} u &= F(\xi) + G(\eta), \quad \forall F, G \in C^2 \\ &= F(x + at) + G(x - at) \end{aligned}$$

Step 2 下面我们根据 (3.1.2) 中的初值条件来确定上面通解中的函数 F, G 。

$$\text{由 } u(x, 0) = \varphi(x) \Rightarrow F(x) + G(x) = \varphi(x) \Rightarrow F'(x) + G'(x) = \varphi'(x),$$

$$\text{由 } u_t(x, 0) = \psi(x) \Rightarrow a[F'(x) - G'(x)] = \psi(x),$$

结合上面两个式子, 得

$$F'(x) = \frac{1}{2a} [a\varphi'(x) + \psi(x)] \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + \delta,$$

$$G'(x) = \frac{1}{2a} [a\varphi'(x) - \psi(x)] \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + \varepsilon,$$

其中 δ, ε 是常数。将上面两个式子相加, 再结合 $F(x) + G(x) = \varphi(x)$, 得 $\delta + \varepsilon = 0$ 。

于是,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + at) + G(x - at) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy。 \end{aligned}$$

Remark: 1) 从上面的这个公式可以看出, $u(x, t)$ 是 $F(x + at)$, $G(x - at)$ 的叠加, 即“左行波”与“右行波”的叠加。

2) 我们可以验证: 如果初值条件中的函数 $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$, 令

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy,$$

则 $u(x, t)$ 满足 (3.1.2)。

3) 解的唯一性: 如果初值条件中的函数 $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$, 则 (3.1.2) 的解是唯一的, 解的表达式由达朗贝尔公式给出。

这是因为: 在整个求解 (3.1.2) 的过程中, 我们对解 $u(x, t)$ 没有作别的限制条件, 所以 (3.1.2) 的任何一个解都一定写成达朗贝尔公式的形式, 所以解是唯一的。

4) 我们可以验证: 解对初值的连续依赖性。

5) 达朗贝尔公式还可以写成另外一种形式:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(t\hat{M}\varphi) + t\hat{M}\psi, \quad \text{其中}$$

$$\hat{M}\varphi = \frac{1}{2at} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(s) ds, \quad \hat{M}\psi = \frac{1}{2at} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds,$$

分别表示函数 φ, ψ 在区间 $[x-at, x+at]$ 上的“区间平均值”。

根据上面 Remark 2), 3), 4), 得初值问题 3.1.2) 的“适定性”。

(2) 达朗贝尔公式的应用

用“反射法”(奇延拓方法) 求解半直线上的初值问题。

例 3.1.1 求解下列初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), u_t(x, 0) = h(x), x \geq 0 \\ u(0, t) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

其中函数 g, h 满足 $g(0) = h(0) = 0$ 。

解: 先对函数 u, g, h 作奇延拓, 记为 $\bar{u}, \bar{g}, \bar{h}$ 。

我们可以验证 $\bar{u}(x, t)$ 满足下列初值问题

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0, x \in R^1, t > 0 \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{g}(x), \bar{u}_t(x, 0) = \bar{h}(x), x \in R^1 \end{cases}$$

根据达朗贝尔公式可以求出上面初值问题的解 $\bar{u}(x, t)$ 。再根据 $\bar{u}(x, t)$ 的定义, 限制 $x \geq 0, t \geq 0$, 得

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad \text{当 } x \geq t \geq 0;$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \left[\int_{x-t}^0 -h(-y) dy + \int_0^{x+t} h(y) dy \right], \quad \text{当 } 0 \leq x \leq t \\ &= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \left[\int_{t-x}^0 h(y) dy + \int_0^{x+t} h(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

■

思考题： 用“行波法”求解下列非齐次波动方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in R^1 \end{cases}$$

(3) 达朗贝尔公式中解的依赖区域、决定区域、影响区域

依赖区域： 给定点 $(x_0, t_0) \in R^1 \times (0, +\infty)$ ，看解 $u(x, t)|_{(x, t)=(x_0, t_0)}$ 的值依赖于初值函数 φ, ψ 在哪些地方的取值。由 (3.1.5)， (x_0, t_0) 这一点处的依赖区域是指区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 。换句话说，改变初值函数 φ, ψ 在区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 之外的值不会影响解 $u(x, t)$ 在 (x_0, t_0) 这一点处的值。

决定区域： 给定区间 $I = [\xi - R, \xi + R]$ ，看解 $u(x, t)$ 在哪些点处的值由初值函数 φ, ψ 在区间 I 上的值决定。换句话说，改变初值函数 φ, ψ 在区间 I 之外的值，不会影响解 $u(x, t)$ 在这些点处的值。记这个决定区域为 $B(I)$ ，那么 $\forall (x_0, t_0) \in B(I)$ ，我们要求

$$[x_0 - at_0, x_0 + at_0] \subset I \Rightarrow \begin{cases} x_0 + at_0 \leq \xi + R \\ x_0 - at_0 \geq \xi - R \end{cases}, \text{ 又注意到我们要求 } t_0 \geq 0, \text{ 所以 } B(I) \text{ 是由}$$

两条直线 $x - at = \xi - R$ ， $x + at = \xi + R$ 与区间 I 围成的三角形区域的闭包。

影响区域： 给定区间 $I_1 = [x_0, x_1]$ ，看初值函数 φ, ψ 在区间 I_1 上的值会影响到解 $u(x, t)$ 在哪些点处的值。换句话说，改变初值函数 φ, ψ 在区间 I_1 上的值，会影响解 $u(x, t)$ 在这些点处的值。记这个影响区域为 G ，那么 $\forall (x, t) \in G$ ，我们要求

$$[x - at, x + at] \cap I_1 \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x + at \geq x_0 \\ x - at \leq x_1 \end{cases}, \text{ 又注意到我们要求 } t \geq 0, \text{ 所以 } G \text{ 是由两条直线}$$

$x + at = x_0$ ， $x - at = x_1$ 与区间 I_1 围成的无界区域。

图3.1. 点 (x_0, t_0) 的
依赖区域
 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$.

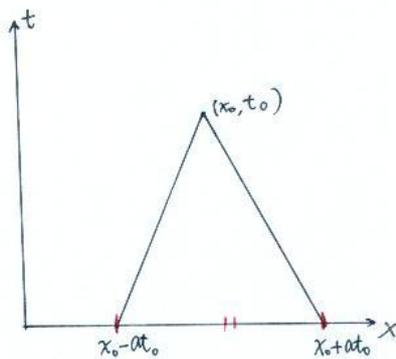


图3.2. 区间 $I = [\xi - R, \xi + R]$ 的
决定区域 $B(I)$.

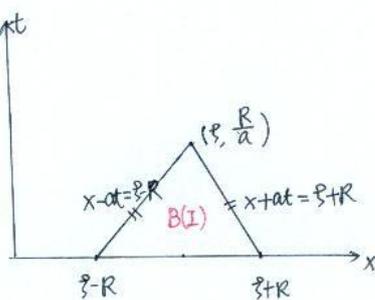
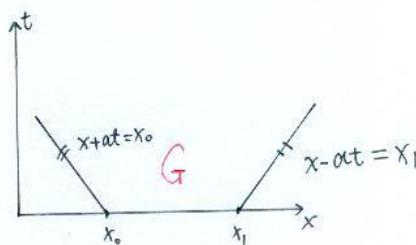


图3.3. 区间 $I_1 = [x_0, x_1]$ 的
影响区域 G .



§2 分离变量法

- 1、教学内容及教学方式
讲授。
- 2、电子教案

用分离变量法求解下列一维波动方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.2.6)$$

其中初值条件和边值条件要相容，即

$f(0) = f(l) = 0$ ， $g(0) = g(l) = 0$ 。这是因为

$$f(0) = u(x, 0)|_{x=0} = u(0, t)|_{t=0} = 0,$$

上面第一个等号是根据初值条件，最后一个等号是根据边值条件。类似的有

$$f(l) = u(x, 0)|_{x=l} = u(l, t)|_{t=0} = 0.$$

对于函数 g ，有

$$g(0) = u_t(x, 0)|_{x=0} = u_t(0, t)|_{t=0}, \text{ 注意到边值条件 } u(0, t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow u_t(0, t) = 0, \forall t \geq 0,$$

所以 $g(0) = 0$ 。类似的有 $g(l) = 0$ 。

下面我们用分离变量法求解 (3.2.6)。

Step 1. 分离变量

令 $u(x, t) = X(x)T(t)$ ，则

$$u_{tt} = X(x)T''(t), \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$$

把它代入 (3.2.6) 中的方程，得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \triangleq -\lambda,$$

因为上面的式子左端是关于 t 的函数，右端是关于 x 的函数，所以当且仅当它们都是常数时等号才成立。我们记这个常数为 $-\lambda$ 。则函数 $T(t), X(x)$ 满足下面的方程

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l \end{cases} \quad (3.2.7)$$

根据 (3.2.6) 中的边值条件，我们要求 $X(x)$ 满足

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Step 2. 解特征值问题

先求关于 $X(x)$ 的 ODE 两点边值问题。

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

我们的目标是：Find $\lambda \in \mathbb{R}$ and $X(x) \neq 0$ such that $(\lambda, X(x))$ solves the ODE (3.2.8)。

这样的 λ 称为 (3.2.8) 的特征值 (eigenvalue)， $X(x)$ 称为特征值 λ 对应的特征函数

(eigenfunction)。有时候我们为了强调这种对应关系，会把特征函数 $X(x)$ 记为 $X_\lambda(x)$ 。

下面我们根据 (3.2.8) 中 ODE 的通解公式和边值条件来判断：

$\lambda \leq 0$ 不可能是 (3.2.8) 的特征值。换句话说，

对应 $\lambda \leq 0$ ，(3.2.8) 不可能存在非零解。

具体分析如下：

(a) 当 $\lambda < 0$ 时， $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}, \text{ 其中 } A, B \text{ 是常数。}$$

把上面的通解公式代入到 (3.2.8) 的边值条件，得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A=B=0$$

所以当 $\lambda < 0$ 时, (3.2.8) 不可能存在非零解。

(b) 当 $\lambda = 0$ 时, $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 的通解为

$$X(x) = Ax + B, \text{ 其中 } A, B \text{ 是常数。}$$

把上面的通解公式代入到 (3.2.8) 的边值条件, 得

$$A = B = 0.$$

所以当 $\lambda = 0$ 时, (3.2.8) 不可能存在非零解。

下面我们讨论当 $\lambda > 0$ 时, 哪些值会是 (3.2.8) 的特征值。记 $\lambda = k^2$ ($k > 0$), 则 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 的通解为

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx, \text{ 其中 } A, B \text{ 是常数。}$$

把上面的通解公式代入到 (3.2.8) 的边值条件, 得

$$A = 0, \quad B \sin kl = 0.$$

因为我们想寻求非零解, 所以 B 不能等于零。这样的话, 就只能是 $\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi, n = 1, 2, \dots$

记 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$ 它是 (3.2.8) 的特征值。与 λ_n 对应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

下面我们把 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$ 代入到 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$ 中, 即

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T(t) = 0. \text{ 它的通解为}$$

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t, \text{ 其中 } C_n, D_n \text{ 是常数。}$$

令 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ 。我们可以验证: 对于每个固定的 n , $u_n(x, t)$ 满足 (3.2.6) 中的方程和边值条件。但是对于初值条件, 比如

$$u_n(x, 0) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ 要想让它等于事先给定的函数 } f(x), \text{ 这是不可能的。}$$

解决这个问题的思路是: 叠加所有的 $u_n(x, t)$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

再把 $f(x)$ 按正弦级数展开, 取 C_n 为正弦级数的系数即可。(至少从形式上看, 严格的证明需要验证级数的一致收敛性。)

Step 3. 叠加所有的 $u_n(x, t)$ 。

$$\text{令 } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.2.11)$$

作形式计算

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

根据傅里叶级数理论, 对于函数 $f(x), g(x)$, 如果 $f, g \in C^1$, 并且 $f(0) = f(l) = 0, g(0) = g(l) = 0$. 那么函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上可以展成正弦级数. 具体过程如下:

令 $\varphi(y) = f(\frac{l}{\pi} y), y \in [0, \pi]$. 对 φ 作奇延拓, 令

$$\tilde{\varphi}(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in [0, \pi] \\ -\varphi(-y), & y \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

那么 $\tilde{\varphi}(y)$ 这个奇函数的傅里叶级数只有正弦函数项, 即

$$\tilde{\varphi}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin ny, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{\varphi}(y) \sin ny dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin ny dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\frac{l}{\pi} y) \sin ny dy, \text{ 作变量替换, 令 } x = \frac{l}{\pi} y, \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上可以展成下面的正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ 其中 } C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

类似的, $g(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上可以展成下面的正弦级数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ 其中 } \tilde{D}_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$\text{由 } \tilde{D}_n = D_n \frac{an\pi}{l} \Rightarrow D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

这样我们经过上面的三个步骤, 得到了初值问题 (3.2.6) 的形式解, 即 (3.2.11), 其中的系数 C_n, D_n 由初值条件中的函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上展成的正弦级数的系数来确定. 最后为了证明形式解是 (3.2.6) 的古典解, 我们需要验证: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 及其导数的“一致收敛性”.

定理 3.2.1 如果 $f \in C^4[0, l], g \in C^3[0, l]$, 并且

$$\begin{cases} f(0) = f(l) = 0 \\ f''(0) = f''(l) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g(0) = g(l) = 0 \\ g'(0) = g'(l) = 0 \end{cases},$$

那么 (3.2.6) 的古典解存在, 表达式由 (3.2.11) 给出.

证明: 先用分部积分公式计算 C_n .

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2-l}{l n\pi} \int_0^l f(x) d(\cos \frac{n\pi x}{l})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-l}{l} \frac{1}{n\pi} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l f'(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right], \text{ 由 } f(0) = f(l) = 0, \text{ 有} \\
&= \frac{2}{l} \frac{1}{n\pi} \int_0^l f'(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (\text{第一步}) \\
&= \frac{2}{l} \frac{1}{n\pi} \frac{1}{n\pi} \int_0^l f'(x) d\left(\sin \frac{n\pi x}{l}\right) \\
&= \frac{2}{l} \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} f''(x) dx \right], \text{ 由 } \sin n\pi = \sin 0 = 0, \text{ 有} \\
&= \frac{2}{l} \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 (-1) \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} f''(x) dx \quad (\text{第二步}), \text{ 再仿照第一步, 用 } f''(0) = f''(l) = 0 \text{ 得} \\
&= \frac{2}{l} \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 (-1) \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} f'''(x) dx \quad (\text{第三步}), \text{ 再仿照第二步, 用 } \sin n\pi = \sin 0 = 0 \text{ 得} \\
&= \frac{2}{l} \left(\frac{1}{n\pi}\right)^4 \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} f^{(4)}(x) dx.
\end{aligned}$$

于是,

$$|C_n| \leq \frac{M_1}{n^4}, \text{ 类似的可得 } |D_n| \leq \frac{M_2}{n^4}, \text{ 其中 } M_1, M_2 \text{ 是常数. 记 } M = M_1 + M_2,$$

根据 (3.2.11) 可以推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|C_n| + |D_n|) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_t| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} (|C_n| + |D_n|) \leq M \frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_{tt}| \leq M \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_x| \leq M \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n)_{xx}| \leq M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

根据函数项级数一致收敛性的优级数判别法可得, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 在 $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$ 范围内

一致收敛, 并且关于 x, t 分别求导一次, 二次后均一致收敛。

所以 (3.2.11) 是 (3.2.6) 的古典解。

§ 3 特征函数展开法

考虑下面的非齐次方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l \end{cases}, \quad (3.2.13)$$

其中 $f(0, t) = f(l, t) = 0, \forall t > 0$ 。

我们寻找如下形式的解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (3.2.14)$$

其中 $T_n(t)$ 的表达式待定。根据 (3.2.14)，在保证函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ 一致收敛的前提下，得

$$u(0,t) = u(x,t)|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x)|_{x=0} = 0,$$

$$u(l,t) = u(x,t)|_{x=l} = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x)|_{x=l} = 0,$$

所以 (3.2.14) 满足了初边值问题 (3.2.13) 中的边值条件。

下面求 $T_n(t)$ ，使得 (3.2.14) 满足初边值问题 (3.2.13) 中的方程和初值条件。所以我们要

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 T_n(t)] \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0,$$

注意到 $f(0,t) = f(l,t) = 0, \forall t > 0$ ，我们可以把方程中的非齐次项 $f(x,t)$ 中的 t 固定，看成关于 x 的函数，这样我们就可以在区间 $[0,l]$ 上把 $f(x,t)$ 展成正弦级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ ，其中 $f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ 。然后对上面三个式子分别比较两边系数，得

$$\begin{cases} T_n''(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

回忆非齐次 ODE: $y''(t) + \beta^2 y(t) = f(t)$ ，其中 $\beta > 0$ 是常数，它的通解公式为

$$y(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t + \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t-\tau) d\tau.$$

根据上面的这个通解公式，再结合初值条件，我们可以推出

$$T_n(t) = \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t-\tau) d\tau,$$

把这个表达式代入 (3.2.14) 中，我们就得到了初边值问题 (3.2.13) 的“形式解”。

最后我们可以仿照上一节 **定理 3.2.1** 的证明，证明下面的定理，说明 (3.2.14) 实际上就是初边值问题 (3.2.13) 的古典解。

定理 3.2.2 如果 $f(x,t)$ 连续，关于 x 三次连续可微，并且 f, f_{xx} 在端点处，即当 $x=0, l$ 时，取值为零，则 (3.2.14) 实际上就是初边值问题 (3.2.13) 的古典解。

Remark:

分离变量法和特征函数展开法都只适合“齐次边界条件”。

分离变量法适用于：齐次方程+齐次边界+非齐次初值，

特征函数展开法适用于：非齐次方程+齐次边界+齐次初值，

利用叠加原理，结合分离变量法和特征函数展开法，我们可以求解定解问题：

非齐次方程+齐次边界+非齐次初值。

§ 4 齐次化原理与球面平均法

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

齐次化原理：它是把求解非齐次方程的问题归结为解一个齐次方程的问题，是 ODE 中的常数变易法在线性 PDE 中的推广。通常这个方法称为 Duhamel（杜阿梅尔）原理，又叫齐次化原理。在物理学里面称为冲量原理。

下面我们讨论齐次化原理的具体过程。

Lemma 1. 如果 $w(x, t; \tau)$ 是下面定解问题的解，

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, x \in R^1, t > \tau \\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = f(x, \tau), x \in R^1 \end{cases} \quad (A)$$

则函数

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$$

是下面初值问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), x \in R^1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in R^1 \end{cases} \quad (B)$$

Proof: 根据 (A) 中的定解条件，得

$$w(x, t; t) = 0, \quad w_t(x, t; t) = f(x, t) \quad (C1)$$

先验证 $u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau$ 满足 (B) 中的初值条件。显然， $u(x, 0) = 0$ 。

$$\text{计算 } u_t(x, t) = \int_0^t w_t(x, t; \tau) d\tau + w(x, t; t), \text{ by (C1)}$$

$$= \int_0^t w_t(x, t; \tau) d\tau \quad (C2)$$

所以 $u_t(x, 0) = 0$ 。

下面验证 $u(x, t)$ 满足 (B) 中的方程。

$$\text{直接由 } u(x, t) \text{ 的表达式，有 } u_{xx} = \int_0^t w_{xx}(x, t; \tau) d\tau,$$

$$\text{再由 (C2) 得， } u_{tt} = \int_0^t w_{tt}(x, t; \tau) d\tau + w_t(x, t; t), \text{ by (C1)}$$

$$= \int_0^t w_{tt}(x, t; \tau) d\tau + f(x, t)$$

所以 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \int_0^t (w_{tt} - a^2 w_{xx}) d\tau + f(x, t)$, 由 (A) 中的方程 \Rightarrow
 $= f(x, t)$ ■

下面我们求解定解问题 (A)。

令 $v(x, t; \tau) = w(x, t + \tau; \tau)$, 由 (A) 得

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, x \in R^1, t > 0 \\ v(x, 0; \tau) = 0, v_t(x, 0; \tau) = f(x, \tau), x \in R^1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

把 τ 看成参数, 由达朗贝尔公式得 (P) 的解

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(y, \tau) dy \quad (\text{C3})$$

由 $v(x, t; \tau) = w(x, t + \tau; \tau) \Rightarrow w(x, t; \tau) = v(x, t - \tau; \tau)$, 再由 (C3) 得

$$w(x, t; \tau) = v(x, t - \tau; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy.$$

最后由上面的 Lemma 1, 得初值问题 (B) 的解

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

三维齐次波动方程的初值问题 (球对称情形)

考虑下面的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, x \in R^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其中初值函数 φ, ψ 都是径向函数, 也叫球对称函数 (radial function), 即

$\varphi(x) = \varphi(r), \psi(x) = \psi(r), r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$,
 并且 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ 。

为了求解 (3.4.1), 我们令 $u(x, t) = u(r, t)$, 计算

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r, \quad (3.4.1) \text{ 中的方程可写成}$$

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right). \quad (\text{C1})$$

再令 $w(r, t) = ru(r, t)$, 则

$$\begin{aligned} w_{tt} - a^2 w_{rr} &= r \left[u_{tt} - a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) \right], \text{ 由上面的 (C1) 得} \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $w(r, t)$ 满足下面的定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{rr} = 0, r > 0, t > 0 \\ w(r, 0) = r\varphi(r), w_t(r, 0) = r\psi(r), r \geq 0, \text{ 这对应于课本 P39 的问题 (3.1.8)}. \\ w(0, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

用公式 (3.1.9) 可以得到 $w(r, t)$ 的表达式, 进而由 $w(r, t) = ru(r, t)$ 求出 $u(x, t) = u(r, t)$ 的表达式。

三维齐次波动方程的初值问题 (非球对称情形)

如果 (3.4.1) 中的初值函数 φ, ψ 不是径向函数, 我们要用“球面平均法”来求解 (3.4.1)。我们先给出解的形式, 即 Kirchhoff 公式 (也叫三维 Poisson 公式)

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} \psi(y) dS_y + \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} \varphi(y) dS_y \right)_t, \quad (3.4.7)$$

其中

$S_{at} = \{y \in R^3 : |y - x| = at\}$, 表示以 x 为球心, at 为半径的球面。

球面 S_{at} 的面积为 $|S_{at}| = 4\pi(at)^2$ 。记

$$\widehat{M}\psi = \frac{1}{|S_{at}|} \int_{S_{at}} \psi(y) dS_y, \quad \widehat{M}\varphi = \frac{1}{|S_{at}|} \int_{S_{at}} \varphi(y) dS_y,$$

则上面的 Kirchhoff 公式 (3.4.7) 也可以写成

$$u(x, t) = t\widehat{M}\psi + \frac{\partial}{\partial t}(t\widehat{M}\varphi). \quad (3.4.7)'$$

下面我们介绍如何用球面平均法来推导 Kirchhoff 公式。

令 $\widehat{M}u(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x + \omega r, t) dS_\omega$, 表示 u 在以 x 为球心, r 为半径的球面上的“球面平均值”。

$$\text{计算 } \lim_{r \rightarrow 0} \widehat{M}u(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \lim_{r \rightarrow 0} u(x + \omega r, t) dS_\omega = u(x, t) \quad (C1)$$

我们用 $\widehat{M}u(r, t)$ 代替球对称情形中的 $u(r, t)$, 令 $w(r, t) = r\widehat{M}u(r, t)$, 由 (3.4.1) 中的方程可以推出

$w_{tt} - a^2 w_{rr} = 0$ 。用特征线方法可以求出它的通解

$$w(r, t) = w_1(r + at) + w_2(r - at), \quad \forall w_1, w_2 \in C^2(R), (r, t) \in R^1 \times R^1. \quad (C2)$$

在上面的式子中让 $r \rightarrow 0$, 由 (C1) 推出 $\lim_{r \rightarrow 0} w(r, t) = 0$, 所以

$$w_1(at) = -w_2(-at), \quad \forall t \in R^1 \Rightarrow w_1(s) = -w_2(-s), \quad \forall s \in R^1, \text{ 把它代入 (C2) 得}$$

$$w(r, t) = w_1(r + at) - w_1(at - r) \quad (3.4.5) \Rightarrow$$

$$\widehat{M}u(r, t) = \frac{1}{r} [w_1(r + at) - w_1(at - r)], \text{ 由洛比塔法则, 得}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \widehat{M}u(r, t) = 2w_1'(at) \quad (C3)$$

结合 (C1) (C3), 得

$$u(x, t) = 2w_1'(at) \quad (3.4.6)$$

下面求 $w'_1(r), \forall r > 0$ 的表达式, 然后在这个表达式中取 $r = at$, 这样根据 (3.4.6) 我们就求出了 $u(x, t)$ 。

对 (3.4.5) 分别关于 r, t 求导, 得

$$(w(r, t))_r = w'_1(r + at) + w'_1(at - r),$$

$$\frac{1}{a}(w(r, t))_t = w'_1(r + at) - w'_1(at - r),$$

把上面两个式子相加, 并令 $t \rightarrow 0$, 得

$$(w(r, t))_r|_{t=0} + \frac{1}{a}(w(r, t))_t|_{t=0} = 2w'_1(r). \quad (C4)$$

先计算: 当 $r = at$ 时, $(w(r, t))_r|_{t=0} = ?$

由 $w(r, t) = r\hat{M}u(r, t)$, 我们可以推出

$$(w(r, t))_r|_{t=0} = [\hat{M}u(r, t) + r \frac{\partial}{\partial r} \hat{M}u(r, t)]|_{t=0}, \text{ 其中}$$

$$[\hat{M}u(r, t)]|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x + \omega r, 0) dS_\omega, \text{ 由 (3.4.1) 中的初值条件,}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \varphi(x + \omega r) dS_\omega, \text{ 取 } r = at, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \varphi(x + \omega at) dS_\omega, \text{ 作变量替换, 令 } y = x + \omega at \Rightarrow dS_y = (at)^2 dS_\omega, \text{ 于是}$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{S_{at}} \varphi(y) dS_y = \frac{1}{|S_{at}|} \int_{S_{at}} \varphi(y) dS_y = \hat{M}\varphi; \quad (C5)$$

$$[r \frac{\partial}{\partial r} \hat{M}u(r, t)]|_{t=0} = r \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x + \omega r, 0) dS_\omega \right)_r,$$

$$= r \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \varphi(x + \omega r) dS_\omega \right)_r,$$

$$= r \left(\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi(y) dS_y \right)_r,$$

取 $r = at$, ,注意

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{M}\varphi = \left(\frac{1}{|S_{at}|} \int_{S_{at}} \varphi(y) dS_y \right)_t = \left(\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi(y) dS_y \right)_r \frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi(y) dS_y \right)_r a,$$

于是, 当 $r = at$ 时,

$$r \left(\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi(y) dS_y \right)_r = t(\hat{M}\varphi)_t \quad (C6)$$

结合 (C5) (C6), 当 $r = at$ 时,

$$(w(r, t))_r|_{t=0} = \hat{M}\varphi + t(\hat{M}\varphi)_t = \frac{\partial}{\partial t} (t\hat{M}\varphi) \quad (C7)$$

再计算: 当 $r = at$ 时, $\frac{1}{a}(w(r, t))_t|_{t=0} = ?$

由 $w(r, t) = r\hat{M}u(r, t)$ ，我们可以推出

$$\begin{aligned} & (w(r, t))_t \Big|_{t=0} \\ &= r \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_t(x + \omega r, 0) dS_\omega, \text{ 由 (3.4.1) 中的初值条件,} \\ &= r \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \psi(x + \omega r) dS_\omega, \text{ 取 } r = at, \text{ 得} \\ &= at\hat{M}\psi \end{aligned}$$

所以，当 $r = at$ 时， $\frac{1}{a}(w(r, t))_t \Big|_{t=0} = t\hat{M}\psi$ (C8)

把 (C7) (C8) 代入 (C4) 得

$$2w_1'(at) = t\hat{M}\psi + \frac{\partial}{\partial t}(t\hat{M}\varphi), \text{ 根据 (3.4.6) 我们就求出了}$$

$$u(x, t) = 2w_1'(at) = t\hat{M}\psi + \frac{\partial}{\partial t}(t\hat{M}\varphi), \text{ 这就是 Kirchoff 公式。}$$

第四章 热传导方程

1、教学目标及基本要求

目的：1、理解傅里叶变换及其性质。2、理解用傅里叶变换方法求解热传导方程的初值问题。3、理解热传导方程的极值原理。

要求：熟练掌握求一些特殊函数的傅里叶变换及逆变换；熟练掌握热传导方程的基本解及解核的性质。

2、教学内容及学时分配

教学内容	学时
§ 4.1 傅里叶变换及其性质	2
§ 4.2 求解热传导方程的初值问题	2
§ 4.3 热传导方程的极值原理	2
习题课	2
合计	8

3、教学重点与难点

重点：掌握用傅里叶变换方法求解热传导方程的初值问题。

难点：理解傅里叶变换及其性质。

4、教学方式（手段）及教学过程中应注意的问题

通过讲授法讲解本章中的各种性质定理证明；针对难点内容，通过讲解例题，和学生先讨论问题的思路，然后再讲授问题的证明。

5、本章习题和思考题

习题：习题 4.1, 4.10。

6、本章参考书目

[1] 数学物理方程，谷超豪等编，高等教育出版社，2002.

§ 1 傅里叶变换及其性质

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

傅里叶变换的定义

设函数 $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1 \cap L^1$, 则 $f(x)$ 存在傅里叶变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \text{ 也记为 } F[f].$$

设函数 $g(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, 定义 $g(\xi)$ 的傅里叶逆变换为

$$F^{-1}[g] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \text{ 特别的, 取 } g(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \text{ 则}$$

$$F^{-1}[\hat{f}] = f.$$

思考题：对于函数 $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}^1$, 验证： $F^{-1}[\hat{f}] = f$ 。

傅里叶变换的基本性质

1. 线性性质： $\forall a, b \in \mathbb{C}$ (复数), $f, g \in C^1 \cap L^1$, 则

$$F[af + bg] = aF[f] + bF[g].$$

2. 微分性质: $F[D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha \hat{f}$.

Remark: 根据上面两个性质, 我们可以推出 $F[\Delta f] = -|\xi|^2 \hat{f}$.

3. 卷积 (convolution) 定理

首先我们给出两个函数卷积的定义

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy$$

Remark: 1) 卷积满足交换律, 即 $f * g = g * f$.

2) 卷积的 Young 不等式:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \text{ 其中 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r};$$

特别的,

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

定理 1. $F[f * g] = F[f]F[g]$

定理 2. $F[fg] = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}$

定理 3. $F^{-1}[fg] = F^{-1}[f] * F^{-1}[g]$

定理 4. $F^{-1}[f * g] = (2\pi)^n F^{-1}[f]F^{-1}[g]$

总结起来, 无论对于傅里叶变换, 还是对于傅里叶逆变换, 都是将“卷积”变成“乘积”, 将“乘积”变成“卷积”。

例 4.1.2 求函数 $f(\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$ 的傅里叶逆变换, 其中 $\xi \in R^n, t > 0$ 。

解: 根据傅里叶逆变换的定义, 有

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} I(x_1) I(x_2) \cdots I(x_n), \text{ 其中}$$

$I(x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi_k^2 t - ix_k \xi_k)} d\xi_k$ 。下面计算 $I(x_k)$ 。用配方法, 得

$$= e^{-x_k^2/4t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} d\xi_k.$$

令 $h(x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} d\xi_k$, 计算

$$h'(x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} (-1)2(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k) \frac{-i}{2\sqrt{t}} d\xi_k \quad (C1)$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} [e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2}] = e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} (-1)2(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)\sqrt{t} \quad (C2)$$

由上面的 (C1) (C2) 得

$$h'(x_k) = \frac{-i}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} \Big|_{\xi_k=-\infty}^{\xi_k=+\infty} \right]$$

注意到

$$e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} = e^{-(t\xi_k^2 - \frac{x_k^2}{4t})} e^{\frac{i\xi_k x_k}{2}},$$

$$|e^{\frac{i\xi_k x_k}{2}}| = 1 \quad (\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \forall \theta \in \mathbb{R}),$$

对于固定的 $x_k, t > 0$

$$e^{-(t\xi_k^2 - \frac{x_k^2}{4t})} \rightarrow 0, \quad \text{as } |\xi_k| \rightarrow +\infty$$

于是

$$e^{-(\sqrt{t}\xi_k - \frac{i}{2\sqrt{t}}x_k)^2} \rightarrow 0, \quad \text{as } |\xi_k| \rightarrow +\infty$$

所以, 我们得到

$$h'(x_k) = 0 \Rightarrow h(x_k) = \text{常数}.$$

计算 $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}\xi_k)^2} d\xi_k$, 作变量替换, 令 $y = \sqrt{t}\xi_k$, $dy = \sqrt{t}d\xi_k$,

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } F^{-1}[f] &= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{k=1}^n I(x_k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{k=1}^n \left(e^{-x_k^2/4t} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \right) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/4t}. \end{aligned}$$

§ 2 求解热传导方程的初值问题

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

求热传导方程的初值问题的形式解

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in R^n, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in R^n \end{cases} \quad (4.1.1)$$

其中 $T > 0$ 待定。

下面我们用傅里叶变换方法来求 (4.1.1) 的形式解。

对 $u(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 关于变量 x 作傅里叶变换, 记

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{R^n} u(x, t) e^{-ix\xi} dx,$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx.$$

注意到

$$F[u_t] = \int_{R^n} u_t(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{d}{dt} \int_{R^n} u(x, t) e^{-ix\xi} dx = \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t),$$

$$F[-\Delta u] = |\xi|^2 \hat{u},$$

$$F[u(x, 0)] = \hat{u}(\xi, 0),$$

于是, 由 (4.1.1) 推出

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

求解 (4.1.3) 得

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t},$$

再对 $\hat{u}(\xi, t)$ 关于变量 ξ 作傅里叶逆变换, 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1}[\hat{u}(\xi, t)] = F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}], \text{ 根据上一节中的性质定理 3,} \\ &= F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)] * F^{-1}[e^{-|\xi|^2 t}] \\ &= \varphi(x) * (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/4t} \\ &= \int_{R^n} \varphi(y) (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x-y|^2/4t} dy. \end{aligned}$$

记 $E(x-y, t) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}$, 称为热传导方程的“基本解”。

记 $K(x-y, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x-y|^2/4t}$, 称为初值问题 (4.1.1) 的“解核”。

于是, (4.1.1) 的形式解可写成

$$u(x, t) = \int_{R^n} \varphi(y) K(x-y, t) dy \quad (4.1.5)$$

为了后面的应用, 下面我们给出解核 $K(x-y, t)$ 的几条性质。

1. $K(x-y, t) > 0$, $K(x-y, t) \in C^\infty$, $\forall x, y \in R^n, t > 0$

$$2. \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x-y, t) = 0, \quad \forall x, y \in R^n, t > 0$$

$$3. \int_{R^n} K(x-y, t) dy = 1, \quad \forall x \in R^n, t > 0$$

$$\text{Proof: } \int_{R^n} K(x-y, t) dy = \int_{R^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x-y|^2/4t} dy,$$

作变量替换, 令 $\eta = \frac{y-x}{\sqrt{4t}}$, 注意三点: 一是被积函数换成新的变量, 这一点一般都没有问题; 二是积分上下限, 比如这里, 当 $y = (y_1, \dots, y_n)$ 中的分量 $y_i = +\infty$ 时, 对应的新变量 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ 中的分量 $\eta_i = +\infty$, 当 $y_i = -\infty$ 时, 对应的 $\eta_i = -\infty$; 三是积分微元要跟着变换, 比如这里, $dy = (\sqrt{4t})^n d\eta$ 。注意了这三点后, 我们就可以推出

$$\int_{R^n} K(x-y, t) dy = \int_{R^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\eta^2} (\sqrt{4t})^n d\eta = (\sqrt{\pi})^{-n} \int_{R^n} e^{-\eta^2} d\eta = 1$$

4. 对任意的正数 δ , 下式成立

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y-x| > \delta} K(x-y, t) dy = 0, \quad \forall x \in R^n.$$

Proof: 作变量替换, 令 $\eta = \frac{y-x}{\sqrt{4t}}$, 则 $|y-x| > \delta \Rightarrow |\eta| > \frac{\delta}{\sqrt{4t}}$, 于是

$$\int_{|y-x| > \delta} K(x-y, t) dy = (\sqrt{\pi})^{-n} \int_{|\eta| > A} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \text{这里 } A = \frac{\delta}{\sqrt{4t}}.$$

注意到: 对任意的正数 δ , 当 $t \rightarrow 0^+$ 时, 有 $A \rightarrow +\infty$; 并且

$$\int_{R^n} e^{-\eta^2} d\eta = (\sqrt{\pi})^n < +\infty \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{|\eta| > A} e^{-\eta^2} d\eta = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y-x| > \delta} K(x-y, t) dy = 0, \quad \forall x \in R^n.$$

解的存在性

(4.1.5) 只是初值问题(4.1.1)的形式解. 我们要证明: 对初值函数 $\varphi(x)$ 加上适当的条件, 使得形式解(4.1.5)成为(4.1.1)的古典解.

定理 4.1.1 如果 $\varphi(x) \in C(R^n)$, 且存在常数 $M, A > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leq M e^{A|x|^2}, \quad \forall x \in R^n \quad (4.1.6)$$

成立. 则(4.1.5)是(4.1.1)在区域

$$\Omega = \{(x, t) \mid x \in R^n, 0 < t \leq T\}, \quad \text{其中 } T < \frac{1}{4A}.$$

上的古典解.

Remark 1. 如果 $\varphi(x) \in C(R^n) \cap L^\infty(R^n)$, 即存在常数 $M > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in R^n \quad (4.1.6)'$$

则(4.1.5)是(4.1.1)在区域

$$\Omega = \{(x, t) \mid x \in R^n, 0 < t < +\infty\}$$

上的古典解.

Remark 2. 从(4.1.5)式可以看出, 解 u 在 (x_0, t_0) 这一点处的值依赖于初始函数 φ 在 R^n 上

所有点的值，而波动方程（以一维为例）的解 u 在 (x_0, t_0) 这一点处的依赖区域为 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 。

Remark 3. 再看 (4.1.5) 式，初始函数 φ 在一点 y_0 附近的值，会影响解 u 在 R^n 上所有点的值，也就是说，如果改变 φ 在一点 y_0 附近的值，解 u 在 R^n 上所有点的值都会受到影响。而根据波动方程（以一维为例）的影响区域的概念，可知它与热传导方程的情况完全不同。我们将上面的热传导方程的这种性质称为：热传导方程使得初始扰动具有“无穷传播速度”，而波动方程使得初始扰动具有“有限传播速度”。

Proof of Thm4.2.1: 先证 $u(x, t) \in C(\Omega)$. 任取常数 $a > 0, 0 < t_0 < T$, 记 $L = \{(x, t) \mid |x| \leq a, t_0 \leq t \leq T\}$, 如果我们能证明 $u(x, t) \in C(L)$, 那么对任意的 $(x, t) \in \Omega$, 我们都可以选取适当的 $a > 0, 0 < t_0 < T$ 使得 $(x, t) \in L$, 这样我们就可以由 $u(x, t) \in C(L) \Rightarrow u(x, t) \in C(\Omega)$ 。

下面分两步证明 $u(x, t) \in C(L)$

Step1. 证明：对任意的 $(x, t) \in L$, 有 $|u(x, t)| < +\infty$.

由 (4.1.5), (4.1.6) 可以推出

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \int_{R^n} \varphi(y) (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x-y|^2/4t} dy \right| \\ &\leq (4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} |\varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4T}} dy \\ &\leq (4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}} M \int_{R^n} e^{(A|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4T})} dy \end{aligned}$$

记 $c = (4\pi t_0)^{-\frac{n}{2}}$, 则上面的不等式可以写成

$$|u(x, t)| \leq cM \int_{R^n} e^{(A|y|^2 - \frac{|x-y|^2}{4T})} dy \quad (4.1.7)$$

记 $\bar{A} = -\frac{1}{4T}$, 对上式被积函数中的指数配方, 得

$$A|y|^2 + \bar{A}|x-y|^2 = (A + \bar{A}) \left| y - \frac{\bar{A}}{A + \bar{A}} x \right|^2 + \frac{A\bar{A}}{A + \bar{A}} |x|^2, \quad (C1)$$

注意：这里配方的目的是为了把左边含 y 的项凑成 $\beta |y - \alpha x|^2$ 这种形式, 剩下的就只是关于 x 的项。

把上面的 (C1) 代入 (4.1.7) 中, 有

$$|u(x, t)| \leq cM e^{\frac{A\bar{A}}{A+\bar{A}}|x|^2} \int_{R^n} e^{(A+\bar{A})|y - \frac{\bar{A}}{A+\bar{A}}x|^2} dy \quad (C2)$$

如果 $A + \bar{A} < 0$, 即 $T < \frac{1}{4A}$, 则 $\frac{\bar{A}}{A + \bar{A}} > 0 \Rightarrow$ 对任意的 $(x, t) \in L$, 有

$$e^{\frac{A\bar{A}}{A+\bar{A}}|x|^2} \leq e^{\frac{A\bar{A}}{A+\bar{A}}a^2}. \quad (C3)$$

另一方面, 由于 $A + \bar{A} < 0$, 我们可以计算出上面 (C2) 中的积分 $\int_{R^n} e^{(A+\bar{A})|y-\frac{\bar{A}}{A+\bar{A}}x|^2} dy$,

作变量替换, 令 $z = \sqrt{-(A+\bar{A})}(y - \frac{\bar{A}}{A+\bar{A}}x)$, 则 $dz = [\sqrt{-(A+\bar{A})}]^n dy$, 于是

$$\int_{R^n} e^{(A+\bar{A})|y-\frac{\bar{A}}{A+\bar{A}}x|^2} dy = \int_{R^n} e^{-|z|^2} dz [\sqrt{-(A+\bar{A})}]^{-n} = (\sqrt{\pi})^n [\sqrt{-(A+\bar{A})}]^{-n} \quad (C4)$$

把 (C3) (C4) 代入 (C2) 中, 则对任意的 $(x, t) \in L$, 有

$$|u(x, t)| \leq cMe^{\frac{A\bar{A}}{A+\bar{A}}a^2} \left[\frac{\pi}{-(A+\bar{A})} \right]^{\frac{n}{2}}. \quad (4.1.8)$$

Step2. 证明 $u(x, t) \in C(L)$. 即证: $\forall (x_0, t_0) \in L$, 有

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)} |u(x, t) - u(x_0, t_0)| = 0$$

In fact,

$$|u(x, t) - u(x_0, t_0)| = (4\pi)^{\frac{-n}{2}} \left| \int_{R^n} \varphi(y) \left[t^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t_0}} \right] dy \right|,$$

用三角不等式,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{R^n} \varphi(y) \left[t^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t_0}} \right] dy \right| \\ & \leq \int_{R^n} |\varphi(y)| \left| t^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right| dy := (I) \\ & + \int_{R^n} |\varphi(y)| \left| t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t_0}} \right| dy := (II) \\ & + \int_{R^n} |\varphi(y)| \left| t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t}} - t_0^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t_0}} \right| dy := (III) \end{aligned}$$

用中值公式及类似于 (4.1.8) 的证明过程, 我们可以推出: 当 $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$ 时, 上面的 (I) (II) (III) 都分别趋近于零。所以 $u(x, t) \in C(L)$ 。

再证: $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega)$ 。以 $n=1$ 为例, 对下面的积分

$$\int_{R^1} |\varphi(y)| \left| \frac{\partial}{\partial t} K(x-y, t) \right| dy, \quad \int_{R^1} |\varphi(y)| \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x-y, t) \right| dy,$$

$$\int_{R^1} |\varphi(y)| \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x-y, t) \right| dy,$$

作类似于 (4.1.8) 的估计, 再仿照上面 **Step2.** 的过程推出 $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega)$ 。

最后证明 $u(x, t)$ 满足初值条件, 即对任意的 $x_0 \in R^n$, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = \varphi(x_0).$$

我们先在假设条件(4.1.6)'下证明 $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = \varphi(x_0)$. 即存在常数 $M > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in R^n \quad (4.1.6)'$$

根据(4.1.5)和 解核 $K(x-y, t)$ 的性质第3条:

$$\int_{R^n} K(x-y, t) dy = 1, \quad \forall x \in R^n, t > 0$$

我们可以推出

$$\begin{aligned} |u(x_0, t) - \varphi(x_0)| &= \left| \int_{R^n} \varphi(y) K(x_0 - y, t) dy - \varphi(x_0) \int_{R^n} K(x_0 - y, t) dy \right| \\ &\leq \int_{R^n} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| K(x_0 - y, t) dy \end{aligned} \quad (C5)$$

因为 φ 是连续函数, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得: 当 $|y - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x_0| < \delta(\varepsilon)} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| K(x_0 - y, t) dy \\ &< \varepsilon \int_{|y-x_0| < \delta(\varepsilon)} K(x_0 - y, t) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{R^n} K(x_0 - y, t) dy = \varepsilon \end{aligned} \quad (C6)$$

另一方面, 根据假设条件(4.1.6)'得,

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| K(x_0 - y, t) dy \\ &\leq 2M \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} K(x_0 - y, t) dy, \end{aligned} \quad (C7)$$

再由解核 $K(x-y, t)$ 的性质第4条: 对任意的正数 δ , 下式成立

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y-x| > \delta} K(x-y, t) dy = 0, \quad \forall x \in R^n$$

我们可以推出

$$\int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| K(x_0 - y, t) dy \rightarrow 0, \quad \text{as } t \rightarrow 0^+. \quad (C8)$$

把(C6)(C8)代入到(C5)中, 得 $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = \varphi(x_0)$.

下面我们在假设条件(4.1.6)下证明 $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = \varphi(x_0)$. 即存在常数 $M, A > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leq M e^{-A|x|^2}, \quad \forall x \in R^n \quad (4.1.6)$$

与条件(4.1.6)'的证明过程比较, 我们只是不能得到上面的估计式(C7)。我们用新的方法来估计

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| K(x_0 - y, t) dy \\ &\leq |\varphi(x_0)| \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} K(x_0 - y, t) dy + \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y)| K(x_0 - y, t) dy \end{aligned} \quad (C9)$$

由解核 $K(x-y, t)$ 的性质第4条, 有

$$|\varphi(x_0)| \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} K(x_0 - y, t) dy \rightarrow 0, \quad \text{as } t \rightarrow 0^+. \quad (C10)$$

由条件(4.1.6)得

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y)| K(x_0 - y, t) dy \\ & \leq \int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} M e^{-A|y|^2} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x_0-y|^2/4t} dy, \end{aligned} \quad (\text{C11})$$

下面我们用控制收敛定理证明

$$\int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} M e^{-A|y|^2} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x_0-y|^2/4t} dy \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow 0^+.$$

记 $\Omega_1 = \{y \in R^n : |y - x_0| \geq \delta(\varepsilon)\}$,

$$f_t(y) = M e^{-A|y|^2} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{4t}}$$

想证: $\int_{\Omega_1} f_t(y) dy \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow 0^+.$

首先, 对任意的 $y \in \Omega_1$, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq f_t(y) & \leq M e^{-A|y|^2} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}}, \text{ 注意到} \\ & \frac{-n}{t^2} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(y) = 0, \forall y \in \Omega_1.$

其次, 令 $g(t) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\delta^2}{4t}}$, 则

$$g'(t) = t^{-\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2} + \frac{\delta^2}{4t} \right), \text{ 所以当 } t > 0 \text{ 充分小时, 有 } g'(t) > 0,$$

由此推出, 存在 $T_1 > 0$ 充分小使得

$$g(t) \leq g(T_1), \forall 0 < t \leq T_1$$

于是, 当 $t \leq T_1$ 时,

$$0 \leq f_t(y) \leq f_{T_1}(y), \forall y \in \Omega_1.$$

类似于 (4.1.8) 的推导, 有 $\int_{R^n} f_{T_1}(y) dy < +\infty.$

所以由控制收敛定理, 有 $\int_{\Omega_1} f_t(y) dy \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow 0^+.$

再由 (C11) 得

$$\int_{|y-x_0| \geq \delta(\varepsilon)} |\varphi(y)| K(x_0 - y, t) dy \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow 0^+. \quad (\text{C12})$$

把 (C10) (C12) 代入到 (C9) 中, 得 (C8) 成立。 \square

§ 3 热传导方程的极值原理

抛物边界: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界开集, 定义有界柱体

$$Q_T = \Omega \times [0, T] = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq T\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

称 Q_T 的抛物边界为 $\Gamma_T = \overline{Q_T} - Q_T$, 即

$$\Gamma_T = \text{柱体的侧面} + \text{柱体的底面} = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$$

若函数 $u(x, t)$ 在 Q_T 上关于 x 的所有二阶连续偏导数和关于 t 的一阶偏导数存在, 则记 $u \in C^{2,1}(Q_T)$.

下解: 如果 $u \in C^{2,1}(Q_T)$ 满足 $u_t - \Delta u \leq 0, \forall (x, t) \in Q_T$, 则称 u 是热传导方程 $u_t - \Delta u = 0$ 在 Q_T 上的下解。类似的, 如果 $u_t - \Delta u \geq 0$, 则称为上解。

定理 4.2.1 (下解的最大值原理) 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, 且满足 $u_t - \Delta u \leq 0, \forall (x, t) \in Q_T$, 则

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max_{\Gamma_T} u(x, t).$$

特别的, 如果在 Q_T 上成立严格的不等式 $u_t - \Delta u < 0$, 则 $\max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$ 只能在抛物边界 Γ_T 上取到, 即 $\forall (x_0, t_0) \in Q_T$, 有 $u(x_0, t_0) < \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$ 。

Remark: 如果 u 是热传导方程 $u_t - \Delta u = 0$ 在 Q_T 上的上解, 则 $-u$ 必是下解, 由定理 4.2.1 可得关于上解的最小值原理

$$\min_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \min_{\Gamma_T} u(x, t).$$

Proof: Step1. 先证明 $u_t - \Delta u < 0, \forall (x, t) \in Q_T \Rightarrow$

$$\forall (x_0, t_0) \in Q_T, \text{ 有 } u(x_0, t_0) < \max_{\overline{Q_T}} u(x, t).$$

反证法, 假设存在 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 使得 $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$ 。

Claim 1. $u_t(x_0, t_0) \geq 0$

In fact, 根据

$$u_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, t_0 + \delta) - u(x_0, t_0)}{\delta}, \text{ 可知}$$

1) if $t_0 \in (0, T)$, 因为 $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$, 所以总是有

$$u(x_0, t_0 + \delta) - u(x_0, t_0) \leq 0. \text{ 分别取 } \delta \rightarrow 0^+, \delta \rightarrow 0^-, \text{ 于是}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0, t_0 + \delta) - u(x_0, t_0)}{\delta} \leq 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0, t_0 + \delta) - u(x_0, t_0)}{\delta} \geq 0,$$

从而有 $u_t(x_0, t_0) = 0$ 。

2) if t_0 在端点处, 注意到 $(x_0, t_0) \in Q_T$, 根据 Q_T 的定义可知 $t_0 \neq 0$ 。所以我们只需考虑 $t_0 = T$ 的情形, 这时 δ 只能取 $\delta \rightarrow 0^-$, 从而 $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ 。

综合上面两种情况, 有 $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ 。

Claim 2. $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$

1) if $t_0 \in (0, T)$, 则 $u(x_0, t_0)$ 在开区域 $\Omega \times (0, T)$ 内达到局部极大值, 所以 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵 $D^2 u(x_0, t_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta u(x_0, t_0) \leq 0$ 。

2) if $t_0 = T$, 考虑函数 $u(x, T)$, 则 $u(x_0, T)$ 在开区域 Ω 内达到局部极大值, 所以 $n \times n$ 的矩阵 $D^2 u(x_0, T) \leq 0 \Rightarrow \Delta u(x_0, T) \leq 0$ 。

结合 Claim 1, Claim 2 得 $u_t(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$, 这与假设条件 $u_t - \Delta u < 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$ 矛盾。所以 $\forall (x_0, t_0) \in Q_T$, 有 $u(x_0, t_0) < \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$ 。

Step2. 如果 $u_t - \Delta u \leq 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$, 我们要证明 $\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) = \max_{\Gamma_T} u(x, t)$ 。

一方面, 由于 $\Gamma_T \subset \overline{Q_T}$, 所以 $\max_{\Gamma_T} u(x, t) \leq \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$, 下面我们只需证明

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} u(x, t)。$$

为此, 我们构造辅助函数: 对任意的正数 k , 令

$$v(x, t) = u(x, t) - kt,$$

则 $v(x, t)$ 满足

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0, \quad \forall (x, t) \in Q_T。$$

根据 Step1 的结论, 有 $\max_{\overline{Q_T}} v(x, t) = \max_{\Gamma_T} v(x, t)$, 于是

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q_T}} u(x, t) &\leq \max_{\overline{Q_T}} (v(x, t) + kt) \leq \max_{\overline{Q_T}} v(x, t) + kT \\ &= \max_{\Gamma_T} v(x, t) + kT \leq \max_{\Gamma_T} u(x, t) + kT, \end{aligned}$$

由于正数 k 的任意性, 在上面的不等式中令 $k \rightarrow 0^+$, 得

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} u(x, t)。$$

定理 4.2.2 (解的最大值原理) 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, 且满足

$u_t - \Delta u = 0$, $\forall (x, t) \in Q_T$, 则

$$\max_{\overline{Q_T}} |u(x, t)| = \max_{\Gamma_T} |u(x, t)|。$$

Proof: 注意到 $\max_{\overline{Q_T}} |u(x, t)| = \max_{\overline{Q_T}} u(x, t)$ or $-\min_{\overline{Q_T}} u(x, t)$, 如果 u 是热传导方程 $u_t - \Delta u = 0$ 在 Q_T 上的解, 那么 u 既是上解, 也是下解。结合下解的最大值原理与上解的最小值原理, 可得 $\max_{\overline{Q_T}} |u(x, t)| = \max_{\Gamma_T} |u(x, t)|$ 。

定理 4.2.3 (比较原理)

(a) 如果 $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ 是热传导方程在 Q_T 上的解, 并且 $u^{(1)}(x,t) \leq u^{(2)}(x,t)$, $\forall (x,t) \in \Gamma_T$ 。则

$$u^{(1)}(x,t) \leq u^{(2)}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T。$$

(b) 如果 $u(x,t)$, $v(x,t)$ 是热传导方程在 Q_T 上的解, 并且 $v(x,t) \geq 0, \forall (x,t) \in Q_T$. 若 $|u(x,t)| \leq v(x,t)$, $\forall (x,t) \in \Gamma_T$ 。则 $|u(x,t)| \leq v(x,t)$, $\forall (x,t) \in \overline{Q}_T$ 。

Proof: (a) 令 $w(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)$, 则 $w(x,t)$ 是热传导方程在 Q_T 上的解, 并且 $w(x,t) \leq 0$, $\forall (x,t) \in \Gamma_T$ 。由定理 4.2.1, 得

$$\max_{\overline{Q}_T} w(x,t) = \max_{\Gamma_T} w(x,t) \leq 0, \quad \text{所以}$$

$$w(x,t) \leq 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T, \quad \text{即} \quad u^{(1)}(x,t) \leq u^{(2)}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T。$$

(b) 分别把 u, v 和 $-u, v$ 当成上面 (a) 中的 $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$, 得

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T, \\ -u(x,t) &\leq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T。 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad |u(x,t)| \leq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T。$$

比较原理的应用

定理 4.2.5 如果热传导方程的初值问题 (4.1.1) 的解 $u(x,t)$ 满足下列增长条件: 存在常数 $M_1 > 0, A_1 \geq 0$ 使得

$$|u(x,t)| \leq M_1 e^{A_1 |x|^2}, \quad \forall x \in R^n, 0 \leq t \leq T。$$

则这类解必唯一。

第五章 位势方程

1、教学目标及基本要求

目的：1、理解调和函数的基本积分公式。2、理解调和函数的平均值不等式。

3、理解调和函数的极值原理。4. 理解格林函数的定义及重要性质。

要求：熟练掌握求一些特殊函数的傅里叶变换及逆变换；熟练掌握热传导方程的基本解及解核的性质。

2、教学内容及学时分配

教学内容	学时
§ 5.1 调和方程的基本解	2
§ 5.2 调和函数的平均值不等式	2
§ 5.3 格林函数的定义及重要性质	2
复习	2
合计	8

3、教学重点与难点

重点：掌握调和方程的基本解及调和函数的平均值不等式。

难点：理解格林函数的定义及重要性质。

4、教学方式（手段）及教学过程中应注意的问题

通过讲授法讲解本章中的各种性质定理证明；针对难点内容，通过讲解例题，和学生先讨论问题的思路，然后再讲授问题的证明。

5、本章习题和思考题

习题：习题 5.3, 5.6, 5.9。

6、本章参考书目

[1] 数学物理方程，谷超豪等编，高等教育出版社，2002.

§ 1 调和方程的基本解

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

基本解的形式推导

假设 $u(x), x \in R^n, n \geq 2$ 是径向函数，即 $u(x) = u(r), r = |x|$,

则由 $\Delta u(x) = 0$ 可以推出

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0.$$

$$\text{注意到 } [\ln u'(r)]' = \frac{u''(r)}{u'(r)} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \ln u'(r) = (1-n)\ln r + c_1$$

$$\Rightarrow u'(r) = cr^{1-n}.$$

所以，对任意固定的 $y \in R^n$ ，调和方程的基本解为

$$k(x-y) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, n \geq 3$$

$$k(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|, n = 2$$

其中 ω_n 表示 R^n 中单位球的体积。

Remark 1. 基本解中常数的选取可以使得对任意的半径 $r > 0$, 都有

$$\int_{\partial B_r(y)} \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}} dS_x = 1, \text{ 这里 } \bar{v} = \frac{x-y}{r} \text{ 表示球面上的单位外法向。}$$

$$\text{而且, } k'(\rho) = \frac{1}{n\omega_n} \rho^{1-n} = \frac{1}{|\partial B_\rho|}$$

Remark 2. R^n 中半径 $r > 0$ 的球面的表面积为 $n\omega_n r^{n-1}$;

R^n 中半径 $r > 0$ 的球的体积为 $\omega_n r^n$;

$$\text{并且, } \int_0^R |\partial B_\rho| d\rho = \int_0^R n\omega_n \rho^{n-1} d\rho = \omega_n R^n = |B_R|.$$

特别的, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$.

基本解的性质

当 $x \neq y$ 时, $k(x-y)$ 作为 x 的函数, 满足下列三条性质:

1) $\Delta k = 0$; 2) $k \in C^\infty$;

$$3) |Dk| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}}, \quad |D^2k| \leq \frac{C}{|x-y|^n}.$$

Green 公式

假设 Ω 是 R^n 中边界光滑的有界区域, \bar{v} 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向。Green 公式的出发点是下面的散度公式:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{w} dx = \int_{\partial\Omega} \bar{w} \cdot \bar{v} dS \quad (C1)$$

假设 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, 令 $\bar{w} = Du$, 代入上面的 (C1), 得

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(Du) dx = \int_{\partial\Omega} Du \cdot \bar{v} dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} dS \quad (5.1.4)$$

再令 $\bar{w} = uDv$, 注意到

$$\operatorname{div} \bar{w} = \operatorname{div}(uDv) = Du \cdot Dv + u\Delta v,$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = uDv \cdot \bar{v} = u \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

把它们代入上面的 (C1), 得

$$\int_{\Omega} u\Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} dS - \int_{\Omega} Du \cdot Dv dx \quad (5.1.5)$$

类似的, 把 (5.1.5) 中的 u, v 调换位置, 得

$$\int_{\Omega} v\Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} dS - \int_{\Omega} Du \cdot Dv dx \quad (5.1.6)$$

结合 (5.1.5), (5.1.6), 两式相减, 得

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) dS \quad (5.1.7)$$

此式称为 Green 第二公式。

§ 2 调和函数的平均值不等式

1、教学内容及教学方式

讲授。

2、电子教案

调和函数的基本积分公式

我们先给出 $C^2(\bar{\Omega})$ 函数的 Green 表示 (Green identity) .

假设 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 对于任意固定的 $y \in \Omega$, 我们想求出 $u(y)$ 的表达式, 这个表达式由调和方程的基本解 $k(x-y)$ 和 Green 第二公式推导而来。这里我们先给出这个表达式

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} \right] dS_x + \int_{\Omega} k(x-y) \Delta u(x) dx \quad (5.1.9)$$

Remark 1. 如果 u 在 Ω 上具有紧支集, 即集合 $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ 的闭包是 Ω 中的紧子集,

这意味着 $u(x) = 0$ and $\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} = 0$ for any $x \in \Omega$. 由 (5.1.9) 推出

$$u(y) = \int_{\Omega} k(x-y) \Delta u(x) dx \quad (5.1.10)$$

Remark 2. 如果 u 在 Ω 内调和, 即 $\Delta u(x) = 0$ for any $x \in \Omega$. 由 (5.1.9) 推出

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} \right] dS_x \quad (5.1.11)$$

上面的 (5.1.11) 式称为“调和函数的基本积分公式”。

下面我们给出 (5.1.9) 式的推导过程。

因为基本解 $k(x-y)$ 作为 x 的函数, 在 $x=y$ 处有奇性, 所以我们先在 Ω 内挖掉 y 点处的小邻域 $B_{\rho}(y)$.

记 $\Omega_{\rho} = \Omega \setminus \bar{B}_{\rho}(y)$, 在 Ω_{ρ} 上对 $u(x)$ 和 $k(x-y)$ 运用 Green 第二公式, 得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\rho}} [u(x)\Delta k(x-y) - k(x-y)\Delta u(x)] dx \\ &= \int_{\partial\Omega_{\rho}} \left(u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} \right) dS_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} \right) dS_x \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\rho} \cap \partial B_{\rho}(y)} \left(u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} \right) dS_x \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

注意到 $\Delta k(x-y) = 0$ for any $x \in \Omega_\rho$, $\partial\Omega_\rho = \partial\Omega \cup \partial B_\rho(y)$, 对于 $\partial\Omega_\rho$ 的内环部分, 即 $\partial B_\rho(y)$, 如果 \bar{v}_x 是 $\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)$ 上的单位外法向, 那么它与球面 $\partial B_\rho(y)$ 上的单位外法向 $\bar{\rho}_x$ 相差一个负号。我们知道 $\bar{\rho}_x = \frac{x-y}{\rho}$, 所以 $\bar{v}_x = -\bar{\rho}_x = (-1)\frac{x-y}{\rho}$.

下面估计 $\int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} (u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x}) dS_x \rightarrow ?$, as $\rho \rightarrow 0$.

Claim 1. $\int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} dS_x \rightarrow 0$, as $\rho \rightarrow 0$.

In fact,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} dS_x \\ &= - \int_{\partial B_\rho(y)} k(x-y) \frac{\partial u}{\partial \bar{\rho}_x} dS_x \\ &= -k(\rho) \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \bar{\rho}_x} dS_x, \quad \text{by Green formula (5.1.4)} \\ &= -k(\rho) \int_{B_\rho(y)} \Delta u dx, \end{aligned}$$

由于 $|k(\rho) \int_{B_\rho(y)} \Delta u dx| \leq (\max_{\bar{\Omega}} |\Delta u|) |k(\rho)| |B_\rho(y)| \rightarrow 0$, as $\rho \rightarrow 0$.

所以 Claim 1. 成立。

Claim 2. $\int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} dS_x \rightarrow -u(y)$, as $\rho \rightarrow 0$

In fact,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} dS_x \\ &= - \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{\rho}_x} dS_x, \end{aligned} \quad (C1)$$

计算: for $x \in \partial B_\rho(y)$, we have

$$\frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{\rho}_x} = Dk(x-y) \cdot \bar{\rho}_x = k'(|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \frac{x-y}{\rho} = k'(\rho) = \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|},$$

把它代入上面的 (C1), 得

$$\int_{\partial\Omega_\rho \cap \partial B_\rho(y)} u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} dS_x = (-1) \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x. \quad (C2)$$

我们只需验证下面的结论成立, 就证明了 Claim 2.

$$\frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x \rightarrow u(y), \text{ as } \rho \rightarrow 0. \quad (C3)$$

Proof of (C3): Note

$$u(y) = \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(y) dS_x,$$

Thus,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x - u(y) \right| \\
 &= \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \left| \int_{\partial B_\rho(y)} (u(x) - u(y)) dS_x \right| \\
 &\leq \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} |u(x) - u(y)| dS_x, \quad (C4)
 \end{aligned}$$

由于 u 在 Ω 内连续, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\rho = |x - y| < \delta(\varepsilon)$ 时, $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$, 代入上面的 (C4), 有

$$\frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} |u(x) - u(y)| dS_x < \varepsilon \Rightarrow (C3) \text{ holds.}$$

调和函数的平均值不等式

下面我们从 (5.1.9) 式推出调和函数的平均值等式, 更一般的, 有下调和函数及上调和函数的平均值不等式。

定理 5.1.1 设 $u(x) \in C^2(\Omega)$, 这里的 Ω 可以是无界区域, 如果 $-\Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega$, 那么对任意的紧包含于 Ω 中的球 $B_R(y)$, 有

$$u(y) = \frac{1}{|\partial B_R(y)|} \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS_x \quad (5.1.13)$$

$$u(y) = \frac{1}{|B_R(y)|} \int_{B_R(y)} u(x) dx \quad (5.1.14)$$

相应的, 如果是 $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, (下调和函数), 则 (5.1.13), (5.1.14) 中的等号变成 \leq ; 如果是 $-\Delta u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$, (上调和函数), 则 (5.1.13), (5.1.14) 中的等号变成 \geq .

Proof: 在 (5.1.9) 式取 Ω 为 $B_\rho(y)$, $\rho \leq R$, 得

$$\begin{aligned}
 u(y) &= \int_{\partial B_\rho(y)} \left[u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} \right] dS_x + \int_{B_\rho(y)} k(x-y) \Delta u(x) dx \\
 &= k'(\rho) \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x - k(\rho) \int_{B_\rho(y)} \Delta u dx + \int_{B_\rho(y)} k(x-y) \Delta u(x) dx \\
 &= \frac{1}{|\partial B_\rho(y)|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x + \int_{B_\rho(y)} (k(x-y) - k(\rho)) \Delta u(x) dx, \quad (C1)
 \end{aligned}$$

当 $x \in B_\rho(y)$, 即 $|x - y| < \rho$ 时, 由基本解 $k(x - y)$ 的表达式, 得 $k(x - y) < k(\rho)$ 。所以, 如果是 $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, 就有

$$\int_{B_\rho(y)} (k(x-y) - k(\rho)) \Delta u(x) dx \leq 0, \text{ 把它代入 (C1) 中, 就得到}$$

$u(y) \leq \frac{1}{|\partial B_R(y)|} \int_{\partial B_R(y)} u(x) dS_x$ ，这个式子可以写成

$u(y) \int_{\partial B_\rho(y)} 1 dS_x \leq \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x$ ，两边关于 ρ 从 0 到 R 积分，得

$$u(y) |B_R(y)| \leq \int_{B_R(y)} u(x) dx \Rightarrow u(y) \leq \frac{1}{|B_R(y)|} \int_{B_R(y)} u(x) dx. \quad \blacksquare$$

调和函数的极值原理与应用

定理 5.1.2 (下调和函数的强最大值原理)

设 u 是 Ω 区域 (这里的 Ω 可以是无界的) 内的下调和函数, 即 $u(x) \in C^2(\Omega)$ 且 $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, 如果存在 $y \in \Omega$ 使得 $u(y) = \sup_{\Omega} u$, 则 u 在 Ω 区域内是常数。

Proof: 记 $M = \sup_{\Omega} u$, 因为存在 $y \in \Omega$ 使得 $u(y) = \sup_{\Omega} u$, 所以 $M < +\infty$, 并且

$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \emptyset$. 下证 Ω_M 相对于 Ω 是开集. 即证明, $\forall z \in \Omega_M$, 存在 $R > 0$ 使得 $B_R(z) \cap \Omega \subset \Omega_M$. 事实上, 因为 Ω 是开集, 所以存在 $R > 0$ 充分小使得 $B_R(z) \subset \subset \Omega$, 对下调和函数 $u - M$ 用平均值不等式, 得

$$0 = u(z) - M = (u(x) - M)|_{x=z} \leq \frac{1}{|B_R(z)|} \int_{B_R(z)} (u(x) - M) dx, \quad (C1)$$

注意到 $M = \sup_{\Omega} u$ 以及 $B_R(z) \subset \subset \Omega$, 所以 $u(x) - M \leq 0, \forall x \in B_R(z)$. 这意味着

$$\frac{1}{|B_R(z)|} \int_{B_R(z)} (u(x) - M) dx \leq 0, \quad (C2)$$

结合 (C1) (C2), 有 $\int_{B_R(z)} (u(x) - M) dx = 0$, 再根据 $u(x) - M \leq 0, \forall x \in B_R(z)$, 我们就可以推出 $u(x) = M, \forall x \in B_R(z)$. 由此以及 $B_R(z) \subset \subset \Omega$, 得 $B_R(z) \cap \Omega \subset \Omega_M$. 所以 Ω_M 相对于 Ω 是开集。

如果我们能证明 Ω_M 相对于 Ω 也是闭集. 那么 Ω_M 就是相对于 Ω 的既开又闭的非空子集, 根据 Ω 的连通性, 就有 $\Omega_M = \Omega$, 这样我们就证明了 u 在 Ω 区域内是常数. 实际上这个常数就是 M .

为了证明 Ω_M 相对于 Ω 也是闭集, 即证明, $\Omega_M = \Omega \cap F$, 其中 F 是 R^n 中的闭集. 如果有 $u(x) \in C(\overline{\Omega})$, 那么令 $F = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) = M\}$, 那么 F 肯定是 R^n 中的闭集, 并且 $\Omega_M = \Omega \cap F$.

如果没有 $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ 这个条件, 我们就用下面定义的 Ω_δ 替代 Ω .

对于任意的 $\delta > 0$, 定义集合

$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$, 则一定有 $u(x) \in C(\overline{\Omega_\delta})$, 根据上面的证明可知 u 在 Ω_δ 区域内是常数. 再由 $\delta > 0$ 的任意性, 我们推出, u 在 Ω 区域内是常数. \blacksquare

Remark: 由上面的证明过程可以看出, 只有函数 $u(x) \in C(\Omega)$, 且在 Ω 内的任意球上满足“次平均等式”, 定理 5.1.2 的结论依然成立。

定理 5.1.3 (下调和函数的弱最大值原理)

设 Ω 有界, $u(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Proof: 因为 Ω 有界且 $u(x) \in C(\overline{\Omega})$, 所以存在 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 使得 $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. 分两种情况:

- 1) 如果 $x_0 \in \partial\Omega$, 则 $u(x_0) \leq \max_{\partial\Omega} u$, 又因为 $\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, 所以 $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
- 2) 如果 $x_0 \in \Omega$, 则根据定理 5.1.2 得, u 在 Ω 区域内是常数. 所以 $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. ■

定理 5.1.8 (Dirichlet 外问题的解的唯一性)

设 Ω 是 R^n 中的有界区域, 则下面 Poisson 方程的 Dirichlet 外问题至多有一个解

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), x \in R^n \setminus \Omega \\ u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

Proof: 反证法. 设 u_1, u_2 是问题 (P) 的两个解, 令 $v(x) = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = 0, x \in R^n \setminus \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = 0 \end{cases}$$

Claim: $v(x) \equiv 0, \forall x \in R^n \setminus \Omega$.

不然的话, 假设存在 $x_0 \in R^n \setminus \Omega$ 使得 $v(x_0) \neq 0$, 不妨设 $v(x_0) > 0$. 注意到 $v|_{\partial\Omega} = 0$, 所以 $x_0 \in R^n \setminus \overline{\Omega}$.

由于 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = 0$, 所以存在 $R > 0$ 充分大使得

$$\max_{x \in \partial B_R(0)} v(x) < v(x_0), \text{ 且 } x_0 \in B_R(0).$$

记 $\Omega_R = B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$, 则 $x_0 \in \Omega_R$. 结合 $v|_{\partial\Omega} = 0 < v(x_0)$ 及 $\max_{x \in \partial B_R(0)} v(x) < v(x_0)$, 得

$v(x_0) > \max_{x \in \partial\Omega_R} v(x)$, 又因为 $x_0 \in \Omega_R$, 所以我们推出, $\max_{x \in \overline{\Omega_R}} v(x)$ 一定在 Ω_R 内达到. 根据

定理 5.1.2 得, v 在 Ω_R 区域内是常数. 记这个常数为 a , 则 $a = v(x_0) = v|_{\partial\Omega} = 0$, 这与 $v(x_0) > 0$ 的假设矛盾. 所以 Claim 的结论成立. ■

§ 3 格林函数的定义及重要性质

1、教学内容及教学方式

讲授。

3、电子教案

格林函数的定义

1) 为什么要引入格林函数

考虑调和方程的 Dirichlet 问题, 其中 $\Omega \subset R^n$ 是有界区域,

$$(H) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega \end{cases}$$

根据调和函数的基本积分公式 (5.1.11):

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x} - k(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} \right] dS_x$$

从上面的式子及 (H) 可以看出, 要求出 $u(y)$ 的值, 右边的被积函数里面, $u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial k(x-y)}{\partial \bar{v}_x}|_{\partial\Omega}, k(x-y)|_{\partial\Omega}$ 都是已知项, 只有 $\frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x}|_{\partial\Omega}$ 是“未知项”, 这导致我们无法直接从 (5.1.11) 式得到问题 (H) 的解。

下面, 我们通过“校正”(adjust) 基本解 $k(x-y)$, 使得我们可以消除 (5.1.11) 中的 $\frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x}|_{\partial\Omega}$ 这一“未知项”。这也是我们引入 Green 函数的原因。

2) 格林函数的具体形式

Fix $y \in \Omega$, 设 $h(x, y)$ 作为 x 的函数满足

$$(5.2.4) \quad \begin{cases} -\Delta_x h(x, y) = 0, x \in \Omega \\ h(x, y) = -k(x, y), x \in \partial\Omega \end{cases}$$

我们先假设问题 (5.2.4) 存在解 $h(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$, 对 h, u 用 Green 第二公式 (5.1.7), 得

$$\int_{\Omega} (u\Delta h - h\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h}{\partial \bar{v}_x} - h \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} \right) dS_x \quad (C1)$$

由 $\Delta h = 0$, by (5.2.4); $\Delta u = 0$, by (H); 代入上面的 (C1), 有

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h}{\partial \bar{v}_x} - h \frac{\partial u}{\partial \bar{v}_x} \right) dS_x = 0, \text{ 把这个式子与上面的 (5.1.11) 式相加, 得}$$

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial (k(x-y) + h(x, y))}{\partial \bar{v}_x} - (k(x-y) + h(x, y)) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}_x} \right] dS_x \quad (C2)$$

再根据 (5.2.4) 的边界条件, 有 $k(x-y) + h(x, y) = 0, \forall x \in \partial\Omega$, 以及 (H) 的边界条件,

这样 (C2) 就变成

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial(k(x-y) + h(x,y))}{\partial\bar{v}_x} dS_x = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial(k(x-y) + h(x,y))}{\partial\bar{v}_x} dS_x \quad (\text{C3})$$

记 $G(x, y) = k(x-y) + h(x, y)$ ，则上面的 (C3) 写成

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial\bar{v}_x} dS_x, \quad (5.2.2)$$

上面的 $G(x, y)$ 称为区域 Ω 的 Green 函数，而 $h(x, y)$ 称为校正函数 (corrector function)。
所以，

Green 函数 = 调和方程的基本解 + 校正函数。

引入 Green 函数，我们就求出了 (H) 的形式解 (5.2.2)。

Green 函数的重要性质

1) 唯一性； 2) 对称性； 3) $k(x-y) < G(x, y) < 0, \forall x \in \Omega, x \neq y$ 。